ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Емельянова Т.В.,
кандидат технических наук, доцент
Кольчатов А.М.,
кандидат технических наук, доцент
Арзамасский политехнический институт (филиал) Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева (Арзамас)
emelyanova@apingtu.edu.ru

Аннотация. *В данной статье рассмотрен итерационный метод решения системы матричных уравнений. Данный метод позволяет находить более точные решения. Разработан алгоритм, который реализован в системе компьютерной математики MATLAB. Исследована проблема сходимости алгоритма.*

Ключевые слова: *система матричных уравнений, итерационный методы, множитель сходимости, система MATLAB.*

ITERATIVE METHOD FOR SOLVING SYSTEMS OF MATRIX EQUATIONS

T. Emelyanova, A. Kolchatov
Arzamas Polytechnic Institute (branch) of Nizhny Novgorod State Technical University named after R.E. Alekseyev (Arzamas)

Abstract. *This article discusses the iterative method for solving the systems of matrix equations. This method allows you to find more accurate solutions. The algorithm, which is implemented in a computer mathematics MATLAB. The problem of convergence of the algorithm.*

Key words: *system of matrix equations, iterative methods, convergence factor, system MATLAB.*

Матричные уравнения широко применяются в различных областях знания – в математике, физике, информатике, экономике и др. Например, матрицы используется для решения систем алгебраических и дифференциальных уравнений, нахождения значений физических величин в квантовой теории, шифрования сообщений в Интернете [2].

Существует большое число итерационных методов для решения матричных уравнений, например, такие как методы Якоби и Гаусса-Зейделя [1].

В данной работе рассмотрены итерационный метод решения систем матричных уравнений, предложенный Ф.Дингом и Т.Ченом [3]. Полученные рекурсивные формулы, были реализованы в системе MATLAB.

Рассмотрим систему матричных уравнений вида:

$$\begin{cases} A_{11}X_1B_{11} + A_{12}X_2B_{12} + \ldots + A_{1p}X_pB_{1p} = C_1 \\ A_{21}X_1B_{21} + A_{22}X_2B_{22} + \ldots + A_{2p}X_pB_{2p} = C_2 \\ \vdots \\ A_{p1}X_1B_{p1} + A_{p2}X_2B_{p2} + \ldots + A_{pp}X_pB_{pp} = C \end{cases} \qquad (1)$$

где $A_{ij} \in R^{mxm}$, $B_{ij} \in R^{nxn}$, $C_i \in R^{mxn}$ – постоянные матрицы; $X_j \in R^{mxn}$ – неизвестные матрицы.

Пусть

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} \in R^{(mp)\times n}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_p \end{bmatrix} \in R^{(np)\times m},$$

$$X_i, Y_i^T \in R^{m\times n},$$

$$S_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p1} & \cdots & A_{pp} \end{bmatrix}, S_B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{p1} & B_{p2} & \cdots & B_{pp} \end{bmatrix},$$

$$S_{B^T} = \begin{bmatrix} B_{11}^T & B_{12}^T & \cdots & B_{1p}^T \\ B_{21}^T & B_{22}^T & \cdots & B_{2p}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{p1}^T & B_{p2}^T & \cdots & B_{pp}^T \end{bmatrix},$$

$$S_p = \begin{bmatrix} B_{11}^T \otimes A_{11} & B_{12}^T \otimes A_{12} & \cdots & B_{1p}^T \otimes A_{1p} \\ B_{21}^T \otimes A_{21} & B_{22}^T \otimes A_{22} & \cdots & B_{2p}^T \otimes A_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{p1}^T \otimes A_{p1} & B_{p2}^T \otimes A_{p2} & \cdots & B_{pp}^T \otimes A_{pp} \end{bmatrix}.$$

Итерационные решения можно выразить кратко с использованием поэлементного произведения блочных матриц – звездочного произведения [3]:

$$X * Y = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 Y_1 \\ X_2 Y_2 \\ \vdots \\ X_p Y_p \end{bmatrix},$$

$$X * S_B = \begin{bmatrix} X_1 B_{11} & X_1 B_{12} & \cdots & X_1 B_{1p} \\ X_2 B_{21} & X_2 B_{22} & \cdots & X_2 B_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_p B_{p1} & X_p B_{p2} & \cdots & X_p B_{pp} \end{bmatrix}.$$

В этих выражениях предполагается, что размерности матриц согласованы. Звездочное произведение Кронекера блочных матриц, обозначаемое (*), определяется так [3]:

$$S_{B^T}(*)S_A = S_p.$$

Свойства звездочного произведения описаны в работе [3].

Лемма. Система уравнений (1) имеет единственное решение X_i тогда и только тогда, когда матрица S_p невырожденная [3]:

$$col\left[X_1, X_2, \ldots, X_p\right] = S_p^{-1} col\left[C_1, C_2, \ldots, C_p\right].$$

Если $C_i=0$ (i=1,2,…,p), то соответствующая система однородных уравнений (1) имеет единственное решение X_i (i=1,2,…,p).

Итерационное решение для системы матричных уравнений (1) получается обобщением итерационного решения для системы уравнений Сильвестра [3]. Для этого сначала рассмотрим систему уравнений Сильвестра в более общей форме:

$$\begin{cases} AXI_B + I_A YB = C, \\ DXI_E + I_D YE = F, \end{cases}$$

его итерационное решение может быть выражено так [3]:

$$X(k) = X(k-1) + \\ + \mu \begin{bmatrix} A \\ D \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} C - AX(k-1)I_B - I_A Y(k-1)B \\ F - DX(k-1)I_E - I_D Y(k-1)E \end{bmatrix} \times \\ \times \left[I_B, I_E\right]^T \right\}, \quad (2)$$

$$Y(k) = Y(k-1) + \\ + \mu \begin{bmatrix} I_A \\ I_D \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} C - AX(k-1)I_E - I_D Y(k-1)B \\ F - DX(k-1)I_E - I_D Y(k-1)E \end{bmatrix} \times \\ \times \left[B, E\right]^T \right\}, \quad (3)$$

где I_A, I_B, I_D и I_E – единичные матрицы соответствующих размерностей.

Пусть $X_i(k)$ – итерационные решения X_i. Для системы (1) предлагаем следующий итерационный алгоритм для вычисления решений X_i (i=1,2,…,p):

$$X_i(k) = X_i(k-1) + \mu \begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ \vdots \\ A_{pi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_1 - \sum_{j=1}^{p} A_{1j} X_j(k-1) B_{1j} \\ C_2 - \sum_{j=1}^{p} A_{2j} X_j(k-1) B_{2j} \\ \vdots \\ C_p - \sum_{j=1}^{p} A_{pj} X_j(k-1) B_{pj} \end{bmatrix} \times \left[B_{1i}, B_{2i}, \ldots, B_{pi}\right]^T \quad (4)$$

$$0 < \mu < 2\left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\left\|A_{ij}B_{ij}\right\|^2\right)^{-1} =: \mu_0. \quad (5)$$

Теорема. Если система матричных уравнений (1) имеет единственное решение X_i, i=1,2,…,p, тогда итерационное решение $X_i(k)$, определенное алгоритмом (4)-(5), сходится к решению X_i при любом начальном значении [3]:

$$\lim_{k\to\infty} X_i(k) = X_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Пусть

$$X(k) = \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ \vdots \\ X_p(k) \end{bmatrix} \in R^{(mp)\times n}, C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_p \end{bmatrix} \in R^{(mp)\times n}.$$

Тогда (1) может быть выражено так [3]:

$$S_A * X * S_B I_{np\times n} = C.$$

Используя свойства звездочного произведения, выражение (4) можно представить в следующей форме:

$$X(k) = X(k-1) + \mu S_A^T \begin{bmatrix} C_1 - \sum_{j=1}^{p} A_{1j} X_j(k-1) B_{1j} \\ C_2 - \sum_{j=1}^{p} A_{2j} X_j(k-1) B_{2j} \\ \vdots \\ C_p - \sum_{j=1}^{p} A_{pj} X_j(k-1) B_{pj} \end{bmatrix} * S_{B^T} =$$

$$= X(k-1) + \mu S_A^T \left[C - S_A * X(k-1) * S_B I_{np\times n}\right] * S_{B^T} \quad (6)$$

Множитель сходимости в алгоритме (4) или (6) может быть выбран из следующего условия:

$$0 < \mu < 2\left\{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{\max}\left[A_{ij}A_{ij}^T\right]\lambda_{\max}\left[B_{ij}B_{ij}^T\right]\right\}^{-1}.$$

Для рассмотренного итерационного метода был разработан алгоритм решения системы матричных уравнений.

Вводим исходные данные матрицы A, B, C.

Формируем матрицу S_p. Далее необходимо проверить условие невырожденности матрицы S_p.

Выбираем шаг вычисления итераций по формуле (5). Вычисляем значения X_i по формуле (6) до тех пор, пока итерационная ошибка, вычисляемая по формуле

$$\delta = \sqrt{\frac{\left\|X(k) - X\right\|^2 + \left\|Y(k) - Y\right\|^2}{\left\|X\right\|^2 + \left\|Y\right\|^2}}$$

не будем меньше заданной погрешности метода.

Используя теорему, находим решение системы X_i, Y_i.

Исследуем зависимость сходимости метода от множителя сходимости μ.

Данный алгоритм был реализован в системе компьютерной математики MATLAB.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий работу описанного алгоритма. Пусть дана следующая система матричных уравнений:

$$A_{11}X_1B_{11} + A_{12}X_2B_{12} = C_1,$$
$$A_{21}X_1B_{21} + A_{22}X_2B_{22} = C_2,$$

где

$$A_{11}=\begin{bmatrix}3.00 & -2.00\\ -1.00 & 1.00\end{bmatrix}, A_{12}=\begin{bmatrix}2.00 & 1.00\\ 1.00 & -2.00\end{bmatrix}, A_{21}=\begin{bmatrix}1.00 & 2.00\\ 1.50 & -1.00\end{bmatrix},\ \ A_{22}=\begin{bmatrix}1.00 & -2.00\\ 2.00 & -1.00\end{bmatrix},$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix}1.00 & 1.00\\ -1.00 & -2.00\end{bmatrix}, B_{12}=\begin{bmatrix}1.00 & -2.00\\ -1.00 & 2.00\end{bmatrix}, B_{21}=\begin{bmatrix}2.00 & -1.00\\ 1.00 & 2.00\end{bmatrix},\ \ B_{22}=\begin{bmatrix}1.00 & -1.00\\ -2.00 & 1.00\end{bmatrix},$$

$$C_1=\begin{bmatrix}1.30 & -3.60\\ -2.10 & -1.30\end{bmatrix}, C_2=\begin{bmatrix}17.40 & 24.10\\ 12.55 & 2.20\end{bmatrix}.$$

В качестве начальных значений возьмем $X(0)=Y(0)=10^{-6}\mathbf{1}_{2\times 2}$,

$$0<\mu<2\left\{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{\max}\left[A_{ij}A_{ij}^{T}\right]\lambda_{\max}\left[B_{ij}B_{ij}^{T}\right]\right\}^{-1},$$

$$\mu_0=2/239.7 .$$

Тогда единственными решениями исходной системы являются:

$$X_1=\begin{bmatrix}2.00 & 4.50\\ -0.50 & 4.00\end{bmatrix},\ \ X_2=\begin{bmatrix}-1.10 & -1.00\\ 1.00 & 1.00\end{bmatrix}.$$

Изменение итерационной ошибки δ при различных множителях сходимости μ показано на рисунке 1.

Из графика 1, можно сделать вывод, что при увеличении μ от $\mu=1/357.5,\ 1/239.7,\ 1/150$ до $1/75$, итерационная ошибка уменьшается и в конечном счете сходится к нулю. При увеличении показателя сходимости ошибка становится больше и алгоритм расходится.

Таким образом, решение системы матричных уравнений может быть найдено в виде рекуррентных соотношений. Итерационный метод был реализован в системе MATLAB. Эффективность алгоритма проиллюстрирована на примере.

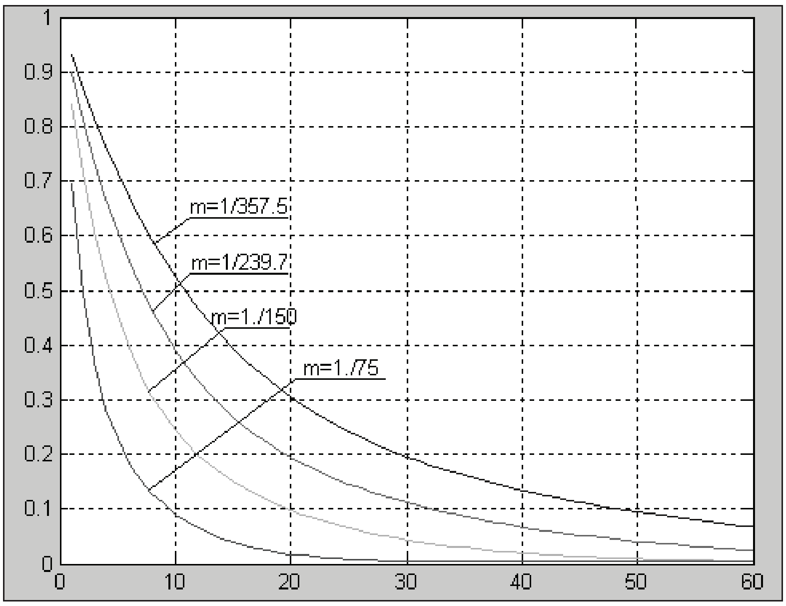

Рис. 1. График изменения относительной итерационной ошибки δ.

Список литературы

1. Гавришина О. Н., Екимова М. Р., Фомина Л. Н. Методы вычислений: учебно-метод. пособие. – Кемерово: Кузбассвузиздат, 2004. – 63 с.
2. Конев В.В. Линейная алгебра. Учебное пособие. – Томск: Изд. ТПУ, 2008. – 65 с.
3. Feng Ding, Tongwen Chen. On iterative solutions of general coupled matrix equations // SIAM J. Control Optim, 2006. – Vol. 44, No. 6. – P. 2269-2284.