О ВЫЧИСЛЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ УСПЕХА В СХЕМЕ БЕРНУЛЛИ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ Т - РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

ON THE CALCULATION OF THE PROBABILITY OF SUCCESS IN A BERNOULLI SCHEME WITH THE HELP OF THE DENSITY FUNCTION OF T - DISTRIBUTION

V. Ryazansky

Annotation

The paper presents aspects of local Bernoulli's theorem, allowing approximately allows to calculate the probability for a certain number of tests using a Gaussian function.

Keywords: distribution, probability of success, the function calculation.

Рязанский Валерий Павлович
Независимый исследователь

Аннотация

В работе представлены аспекты развития локальной теоремы Бернулли, позволяющей позволяет приближенно вычислять вероятности при определенном числе испытаний с помощью функции Гаусса.

Ключевые слова:

Распределение, вероятность, успех, функция, вычисление.

Для простой схемы испытания Бернулли известная локальная теорема Муавра–Лапласа [1, с. 17] позволяет приближенно вычислять вероятности Pn(k), числа успехов k при n испытаниях с помощью функции Гаусса [3, с. 68]. Оказалось, что точное значение вероятности $P_n(k)$ можно вычислить с помощью другой функции, а именно плотности t–распределения [5, с. 45]. Правда, точное значение вероятности может быть получено при одном значении k числа успехов равном $n/2$ [2, с. 51]. При значениях числа успехов из интервала [$n/2$,np] или [np, n/2] имеется отличное приближение при $0.3 \le p \le 0.7$.

Предложение. В простой схеме Бернулли для вероятности числа успехов $k = n/2$ имеется точное равенство [4, с. 10]

$$P_n(k) = p_t(x)\ (npq)^{-1/2} \qquad (1)$$

где n – число испытаний в схеме Бернулли,
p–вероятность успеха при одном испытании,
$q=1-p$ –дополнительная вероятность,

$$x = \frac{(n/2 - np)}{\sqrt{npq}}$$

$$p_t(x) = b_n (1 + x^2 / n)^{\frac{-(n+1)}{2}}$$

– функция плотности t–распределения,

$$b_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}}$$

Доказательство:

Рассмотрим правую часть формулы (1) при,

$$x = \frac{(n/2 - np)}{\sqrt{npq}}$$

учитывая $n=2k$ получаем следующее:

$$p_t(x)/\sqrt{npq} = \frac{b_n}{\sqrt{npq}}(1 + \frac{(1/2 - p)^2}{pq})^{\frac{-(n+1)}{2}}$$

Воспользуемся формулой Лежандра
для коэффициентов b_n

$$\Gamma(a)\Gamma(a+1/2) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2a)/2^{2a-1}$$

и тогда

$$\frac{b_n}{\sqrt{npq}} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}\sqrt{n\pi q}} = C_n^{n/2} / (2^n \sqrt{2p2q}$$

и вместе

$$p_t(x)/\sqrt{npq} =$$

$$= C_n^{n/2} 2^{-n} (2p2q)^{-1/2} (1 + \frac{(1/2 - p)^2}{pq})^{-k-1/2} \qquad (2)$$

здесь видно, что, например, при $p=1/2$
получаем равенство

$$p_t(x)/\sqrt{npq} = C_n^{n/2} 2^{-n} = P_n \qquad (k = n/2)$$

Покажем, что равенство имеет и при p отличном от 1/2.

Рассмотрим коэффициенты при в правой части (2): Так как $p+q=1$, произведение первых двух множителей

$$(2p2q)^{-1/2}(1+\frac{(1/2-p)^2}{pq})^{-k-1/2} =$$

$$=(2p2q)^{-1/2}(1+\frac{(1/2-p)^2}{pq})^{-1/2}(1+\frac{(1/2-p)^2}{pq})^{-k}$$

равно 1.

Домножим и разделим оставшуюся третью скобку на $(2p2q)^{-k}$

Тогда

$$(2p2q)^{-k}(1+\frac{(1/2-p)^2}{pq})^{-k}(2p2q)^{k}=(2p2q)^{k}$$

потому, что произведение первых двух скобок равно 1 по тем же причинам.

Таблица 1.

Относительных погрешностей (%) приближения вероятностей Pn(k) числа успехов k с помощью функции Гаусса и функции плотности t-распределения. n=20.

k	4	5	6	7	8	9	10	p
df	2,21	9,28	9,42	0,19	17,39	39,27	60,41	0,2
df	0,94	7,22	6,81	1,42	4,55	6,52	0,00	0,2
df	7,29	3,38	1,58	5,21	5,70	2,00	5,97	0,3
df	9,56	5,08	0,32	3,36	3,11	1,01	0,00	0,3
df	1,71	4,47	3,51	1,09	1,33	2,72	2,48	0,4
df	1,85	5,98	5,84	2,77	0,07	0,97	0,00	0,4
df	5,5	0,95	2,55	1,88	0,45	0,78	1,26	0,5
df	51,06	14,45	0,32	3,57	2,84	0,91	0,00	0,5
df				7,52	3,11	0,44	2,48	0,6
df				8,7	0,4	1,15	0,00	0,6
df							5,97	0,7
df							0,00	0,7
df							60,41	0,8
df							0,00	0,8
k	10	11	12	13	14	15	16	p
df	60,41							0,2
df	0,00							0,2
df	5,97							0,3
df	0,00							0,3
df	2,48	0,44	3,11	7,52				0,4
df	0,00	1,15	0,40	8,70				0,4
df	1,26	0,78	0,45	1,88	2,55	0,95	5,5	0,5
df	0,00	0,91	2,84	3,57	0,32	14,45	51,06	0,5
df	2,48	2,72	1,33	1,09	3,51	4,47	1,71	0,6
df	0,00	0,97	0,07	2,77	5,84	5,98	1,85	0,6
df	5,97	2,00	5,70	5,21	1,58	3,38	7,29	0,7
df	0,00	1,01	3,11	3,36	0,32	5,08	9,56	0,7
df	60,41	39,27	17,39	0,19	9,42	9,28	2,21	0,8
df	0,00	6,52	4,55	1,42	6,81	7,22	0,94	0,8

С учетом этого и того, что $n=2k$, (2) может быть представлено в следующем виде:

$$p_t(x)/\sqrt{npq} = C_n^{n/2} 2^{-n}(2p2q)^k =$$
$$= C_n^{n/2} 2^{-n} 2^{2k} p^k q^k =$$
$$= C_n^{n/2} p^{n/2} q^{n/2} = P_n \qquad (k = n/2)$$

Таким образом, формула доказана.

В **табл. 1** представлены значения погрешностей приближения вероятностей $P_n(k)$ числа успехов k при помощи функции Гаусса и функции плотности t-распределения при различных значениях k и p. При значениях $k=n/2$ значения погрешностей приближения с помощью функции плотности t-распределения равны 0 для любого р. В интервале $[np,n/2]$ или $[n/2,np]$, в зависимости от значения р, предлагаемое приближение вероятностей $P_n(k)$ имеет погрешности до нескольких раз меньше по сравнению с известным приближением функцией Гаусса. Также следует отметить, что предлагаемое приближение отлично работает на широком интервале значений р от 0,2 до 0,8.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аджиева А.А., Кибишева А.Р. Формула Бернулли // Вестник научных конференций. 2016. № 4–3 (8). С. 17–18.
2. Архангельский А.Н., Кириченко П.В., Пиголкин Г.М. Оценки вероятностей уклонений сумм для случайных величин Бернулли // Вестник МЭИ. 2016. № 1. С. 50–52.
3. Кибишева А.Р., Аджиева А.А. Золотая теорема Бернулли // Молодежный научный форум: технические и математические науки. 2016. № 5 (34). С. 66–70.
4. Медведева В.В. Правило Бернулли–Лопиталя. Исторический аспект // В сборнике: Актуальные проблемы современной науки: теория и практика Материалы Международной научно-практической конференции. 2016. С. 8–13.
5. Хуцишвили В. О необходимости, способе и следствиях учёта апостериорной информации в схеме испытаний Бернулли // Computer Sciences and Telecommunications. 2016. № 1 (47). С. 42–47.