DOI 10.37882/2223-2966.2023.8-2.11

РАЗРАБОТКА КАЛЬКУЛЯТОРА ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ

DEVELOPING A CALCULATOR FOR FUNCTION APPROXIMATION

M. Georgieva
A. Ezaova
L. Kanukoeva
S. Arvanova
I. Georgieva
D. Tlepsheva

Summary. Function approximation is a scientific method that is used to approximate complex functions by simpler functions that have minimal deviations from the original function over a given measurement interval *x*. It has many practical applications in various fields. In each of these areas, we may be faced with the task of approximating complex functions that can be used to predict future values or to analyze past data. That is why the development of a program that performs function approximation is an important step in solving this problem.

Keywords: approximation, calculator, function, data analysis.

Георгиева Марьяна Альбековна
Ст. преподаватель, КБГУ им. Х.М. Бербекова (г. Нальчик)
maryana.g@list.ru
Езаова Алена Георгиевна
к.ф.-м.н., доцент, КБГУ им. Х.М. Бербекова (г. Нальчик)
alena_ezaova@mail.ru
Канукоева Ляна Владимировна
к.ф.-м.н., доцент, КБГУ им. Х.М. Бербекова (г. Нальчик)
armand97a@mail.ru
Арванова Саният Мухамедовна
Ст. преподаватель, КБГУ им. Х.М. Бербекова (г. Нальчик)
sani_07@mail.ru
Георгиева Ирина Альбековна
Ассистент, КБГУ им. Х.М. Бербекова (г. Нальчик)
irka2725@mail.ru
Тлепшева Диана Ануаровна
КБГУ им. Х.М. Бербекова (г. Нальчик)
tliepshieva@list.ru

Аннотация. Аппроксимация функций — это метод научного подхода, который используется для приближения сложных функций более простыми функциями, имеющими минимальные отклонения от исходной функции на заданном интервале измерения *x*. Она имеет множество практических применений в различных областях. В каждой из этих областей мы можем столкнуться с задачей аппроксимации сложных функций, которые могут быть использованы для предсказания будущих значений или для анализа прошлых данных. Именно поэтому разработка программы, выполняющей аппроксимацию функций, является важным шагом для решения данной проблемы.

Ключевые слова: аппроксимация, калькулятор, функция, анализ данных.

Целью данной работы являлась разработка прикладной программы, обеспечивающей аппроксимацию функций нахождением приближающей функции в виде основных элементарных функций.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи [1–6]:

- изучить математическую составляющую вопроса, проанализировать формулы и законы, рассмотреть частные случаи, составить алгоритм аппроксимации функций;
- разработать оптимальную схему взаимодействия «пользователь — система», определить требования к программе, включая форматы входных и выходных данных;
- построить примерную блок-схему программы;
- выбрать язык программирования для реализации алгоритма и создать проект в разрабатываемой среде. Реализовать алгоритм с помощью выбранного языка программирования;
- получить и проанализировать результаты проделанной работы;
- оценить качество программы и провести ее оптимизацию при необходимости. Создать документацию для программы, описывающую ее возможности и инструкции по использованию.

Главное меню программы (рис. 1) содержит 3 активные кнопки:

- Начать — запускается основная часть программы;
- О программе — открывает раздел с описанием данной программы;
- Выход — завершает работу программы.

В разделе **«О программе»** имеется информация об авторе проекта, а также описание самой программы (рис. 2).

Аппроксимация функций осуществляется **нахождением приближающей функции в виде основных элементарных функций**.

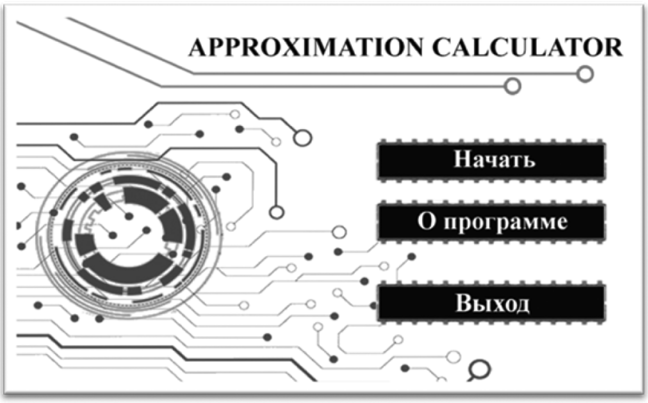

Рис. 1. Главное меню

Рис. 2. О программе

Аппроксимацией функции называется приближенное представление сложной или заданной в виде таблицы функции $f(x)$ более простой функцией $\Psi(x)$, имеющей минимальные отклонения от исходной функции на заданном интервале изменения x. По сути, аппроксимация — это моделирование сложной функции более простой с вычислительной точки зрения функцией. Пусть в результате измерений получены табличные значения некоторой функции $y = f(x)$, выражающей связь между двумя параметрами:

Таблица 1.

Исходная таблица

x	x_1	x_2	…	x_n
$f(x)$	y_1	y_2	…	y_n

Применив метод интерполяции, можно найти формулу, выражающую эту зависимость аналитически. Однако, совпадение значений полученного аналитического выражения функции в узлах интерполяции с имеющимися эмпирическими данными не означает совпадение исходной и интерполирующей функции на всем интервале наблюдения. Задача аппроксимации функции одной переменной учитывает характер поведения исходной функции на всем интервале измерений и формулируется следующим образом. Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей 1. Необходимо найти функцию заданного вида

$$y = F(x),$$

которая в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принимает значения, как можно более близкие к табличным $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

На практике вид приближающей функции чаще всего определяют путем сравнения вида приближенно построенного графика функции $y = f(x)$ с графиками известных функций, заданных аналитически. А именно, по данным таблицы 1 строится точечный график $f(x)$, затем проводится плавная кривая, наилучшим образом отражающая характер расположения точек. С помощью полученной таким образом кривой устанавливается вид приближающей функции.

На рисунке 3 представлен основной экран программы. На нем расположены:

- поля для ввода данных, необходимых при вычислении;
- кнопки для выбора метода вычисления, очистки полей ввода, возвращения на экран главного меню, а также вывода графика;
- поле для вывода результата вычислений с двумя активными кнопками (копировать и сохранить);
- значок для отображения подсказки;

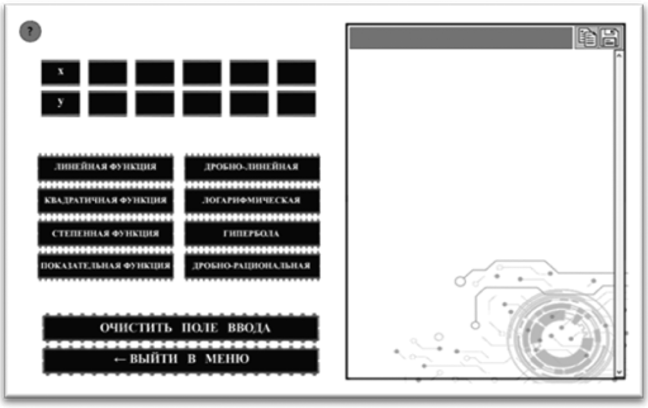

Рис. 3. Основной экран

На рисунке 4 изображена вкладка с подсказкой:

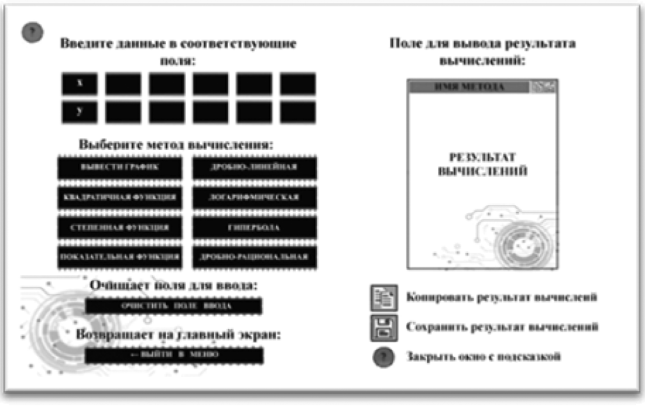

Рис. 4. Подсказка

Нахождение приближающей функции в виде основных элементарных функций

1. Линейная функция (линейная регрессия)

Начальным пунктом анализа зависимостей обычно является оценка **линейной** зависимости переменных. При этом следует учитывать, что «наилучшая» по методу наименьших квадратов прямая линия всегда существует, но даже наилучшая не всегда является достаточно хорошей.

Для рассмотрения задачи оценки коэффициентов линейной регрессии предположим, что связь между x и y линейна и искомую приближающую функцию будем искать в виде:

$$F(x, a, b) = ax + b.$$

Тогда частные производные по параметрам выглядят следующим образом:

$$F_a' = x, F_b' = 1.$$

Полученные соотношения можно представить в виде системы:

$$\begin{cases} \sum_i \left(y_i - ax_i - b \right) x_i = 0 \\ \sum_i \left(y_i - ax_i - b \right) = 0 \end{cases}, i = 1,\dots,n$$

Раскрыв скобки, получаем:

$$\begin{cases} \sum_i y_i x_i - a\sum_i x_i^2 - b\sum_i x_i = 0 \\ \sum_i y_i - a\sum_i x_i - nb = 0 \end{cases}, i = 1,\dots,n$$

Или, разделив каждое уравнение на n:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{n}\sum_i x_i^2 \right) a + \left(\frac{1}{n}\sum_i x_i \right) b = \frac{1}{n}\sum_i y_i x_i \\ \left(\frac{1}{n}\sum_i x_i \right) a + b = \frac{1}{n}\sum_i y_i \end{cases}, i = 1,\dots,n$$

Для упрощения введем следующие обозначения:

$$\frac{1}{n}\sum_i x_i = M_x, \frac{1}{n}\sum_i y_i = M_y,$$

$$\frac{1}{n}\sum_i y_i x_i = M_{xy}, \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 = M_{x^2}$$

Таким образом система принимает вид:

$$\begin{cases} M_{x^2} a + M_x b = M_{xy} \\ M_x a + b = M_y \end{cases}.$$

Коэффициенты этой системы M_x, M_y, M_{xy}, M_x^2 — это числа, которые в каждой конкретной задаче приближения могут быть вычислены путем подстановки их в соответствующие обозначения. Решив данную систему, мы получим значения параметров a и b и, соответственно, конкретный вид линейной функции.

В своей программе я не буду отдельно выводить линейную регрессию. Но к данному виду сводятся все остальные вычисления.

2. Квадратичная функция (квадратичная регрессия)

Приближающую функцию будем искать в виде **квадратного трехчлена**:

$$F\left(x,a,b,c \right) = ax^2 + bx + c.$$

Теперь найдем частные производные $F_a = x^2, F_b = x, F_c = 1$ и составим систему вида:

$$\begin{cases} \sum_i \left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c \right) x_i^2 = 0 \\ \sum_i \left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c \right) x_i = 0 \\ \sum_i \left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c \right) = 0 \end{cases}, i = 1,\dots,n.$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{1}{n}\sum_i x_i^4 = M_{x^4}, \frac{1}{n}\sum_i x_i^3 = M_{x^3},$$

$$\frac{1}{n}\sum_i x_i^2 y_i = M_{x^2 y}$$

Выполнив преобразования, аналогичные преобразованиям, проведенным в линейной регрессии, получим систему с тремя неизвестными *a, b, c* вида:

$$\begin{cases} M_{x^4} a + M_{x^3} b + M_{x^2} c = M_{x^2 y} \\ M_{x^3} a + M_{x^2} b + M_x c = M_{xy} \\ M_{x^2} a + M_x b + c = M_y \end{cases}$$

На рисунке 5 приведен *пример 1* вычислений **квадратичной регрессии**:

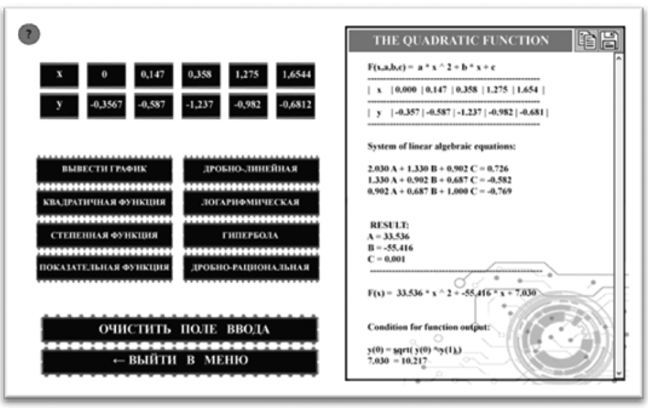

Рис. 5. Квадратичная функция

На рисунке 6 показан график, полученный после нажатия на кнопку **«Вывести график»** из примера 1:

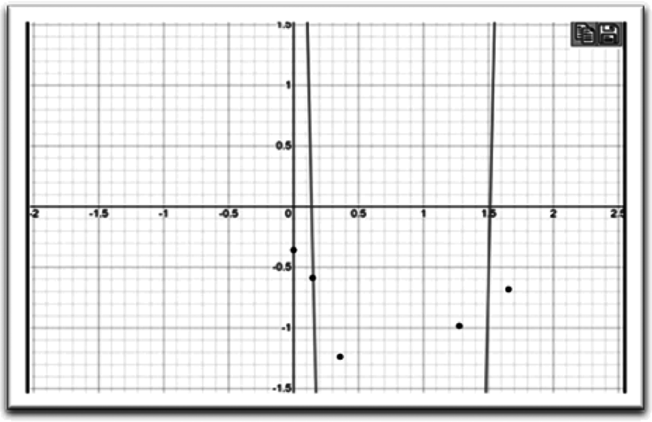

Рис. 6. График квадратичной функции

3. Степенная функция (геометрическая регрессия)

Будем искать приближающую функцию в виде:

$$F(x, a, m) = ax^m.$$

Предположим, что в исходной таблице значения аргумента и значения функции положительны. При условии $a > 0$ прологарифмируем равенство:

$$\ln F = \ln a + m \ln x.$$

Функция F является приближающей для функции f. Следовательно, функция $\ln F$ будет приближающей для функции $\ln f$. Введем следующее обозначение $u = \ln x$. Из этого всего следует, что $\ln F$ будет функцией от u: $\Phi(u)$.

Обозначим:

$$m = A, \ln a = B.$$

Теперь равенство принимает следующий вид, а задача сводится к отысканию приближающей функции в виде линейной:

$$\Phi(u, A, B) = Au + B.$$

Для вычисления значений параметров a и m необходимо построить новую таблицу, прологарифмировав значения x и y в исходной таблице.

На рисунках 7 и 8 приведен *пример 2* вычислений **геометрической регрессии**:

На рисунке 9 показан график, полученный после нажатия на кнопку **«Вывести график»** из примера 2.

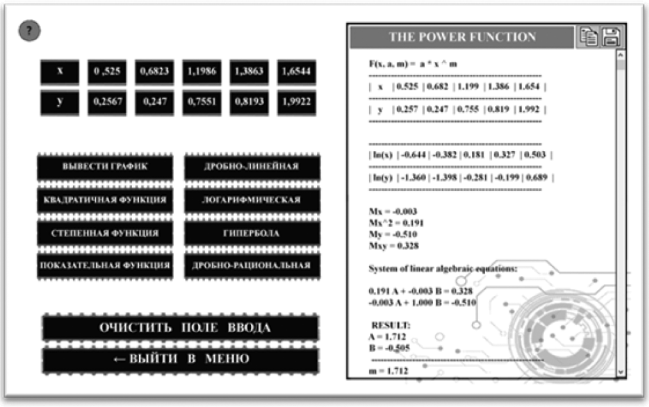

Рис. 7. Степенная функция (часть 1)

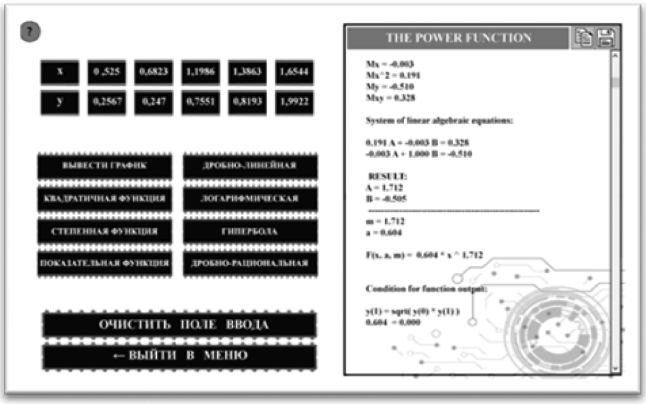

Рис. 8. Степенная функция (часть 2)

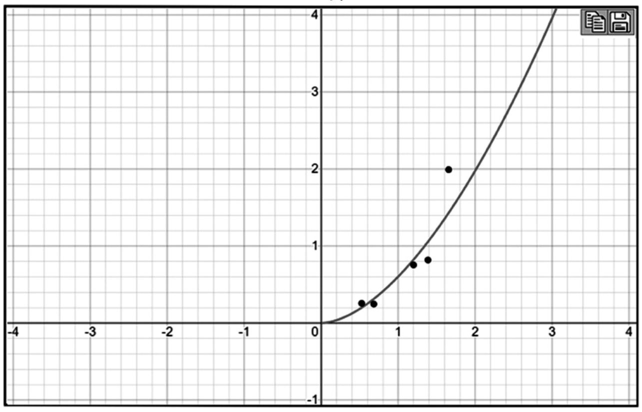

Рис. 9. График степенной функции

4. Показательная функция

Предположим, что нам необходимо искать приближающую функцию в виде **показательной функции**, имеющей следующий вид:

$$F(x, a, m) = ae^{mx}, a > 0.$$

Как и в предыдущем случае прологарифмируем равенство:

$$\ln F = \ln a + mx.$$

А затем введем аналогичные обозначения:

$$\ln F = Ax + B.$$

Таким образом, нахождения приближающей функции в виде показательной функции также сводится к линейной регрессии. Для вычисления значений *a* и *b* необходимо прологарифмировать значения функции в исходной таблице и рассматривать их совместно с исходными значениями аргумента.

На рисунках 10 и 11 приведен *пример 3* нахождения приближающей функции в виде **показательной функции**:

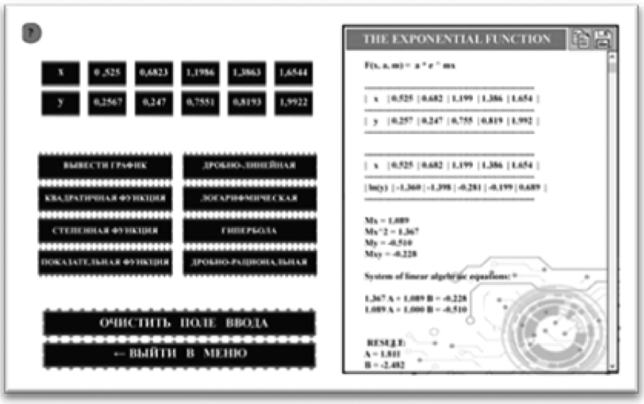

Рис. 10. Показательная функция (часть 1)

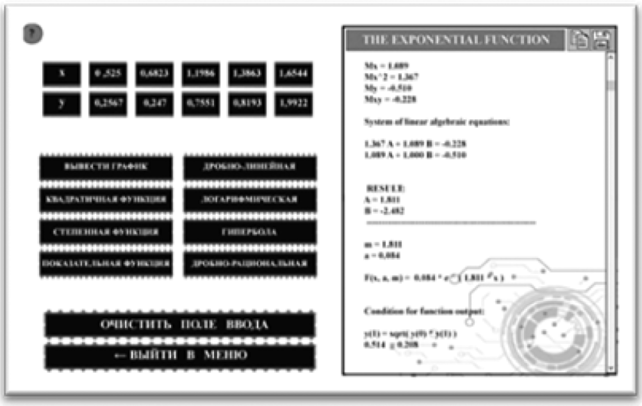

Рис. 11. Показательная функция (часть 2)

На рисунке 12 показан график, полученный после нажатия на кнопку **«Вывести график»** из примера 3:

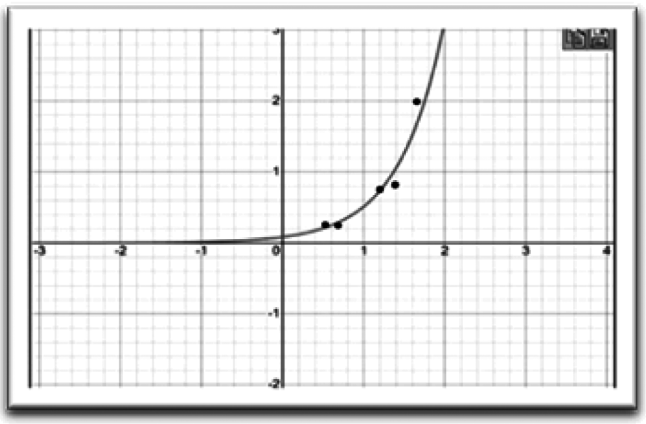

Рис. 12. График показательной функции

5. Дробно-линейная функция

Будем искать приближающую функцию в виде:

$$F(x,a,b) = \frac{1}{ax+b}.$$

Данное равенство перепишем следующим образом:

$$\frac{1}{F(x,a,b)} = ax + b.$$

Из последнего равенства следует, что для нахождения значений параметров *a* и *b* по исходной таблице необходимо составить новую таблицу, у которой значения аргумента оставить прежними, а значения функции заменить обратными числами. Затем найти для полученной таблицы приближающую функцию вида $ax + b$. Найденные значения параметров *a* и *b* подставить в исходную формулу.

На рисунках 13 и 14 приведен *пример 4* нахождения приближающей функции в виде **дробно-линейной функции**:

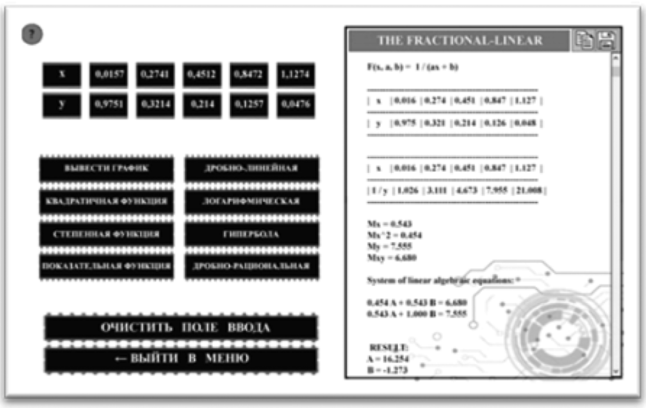

Рис. 13. Дробно-линейная функция (часть 1)

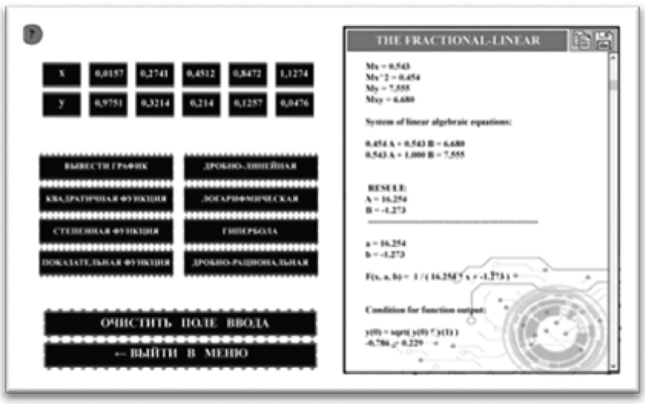

Рис. 14. Дробно-линейная функция (часть 2)

На рисунке 15 показан график, полученный после нажатия на кнопку **«Вывести график»** из примера 4:

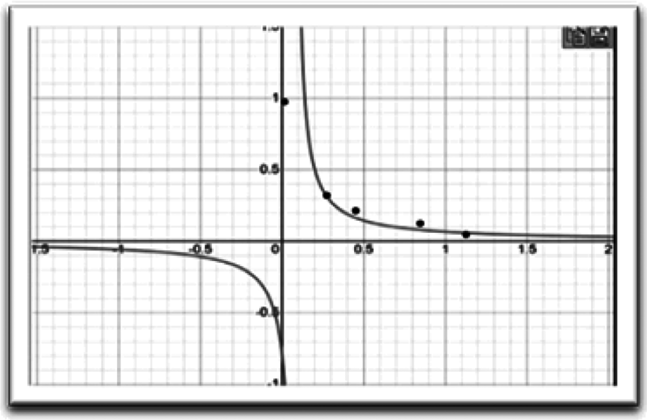

Рис. 15. График дробно-линейной функции

6. Логарифмическая функция

Пусть приближающая функция имеет следующий вид:

$$F(x, a, b) = a \ln x + b.$$

Для перехода к линейной функции необходимо сделать подстановку $\ln x = u$. А для нахождения значений a и b нужно прологарифмировать значения аргументов в исходной таблице и рассматривать полученные значения в совокупности с исходными значениями функции.

На рисунках 16 и 17 приведен *пример 5* нахождения приближающей функции в виде **логарифмической функции**:

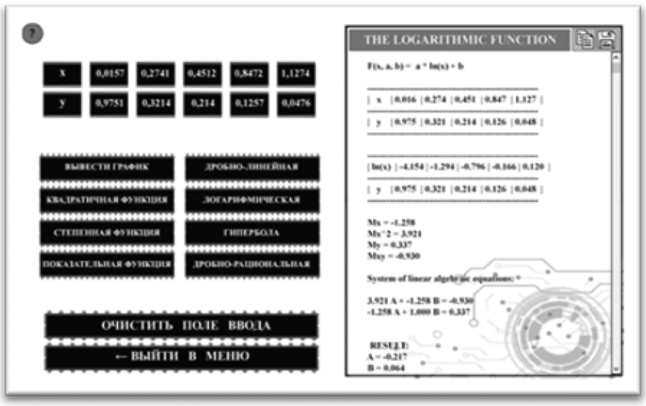

Рис. 16. Логарифмическая функция (часть 1)

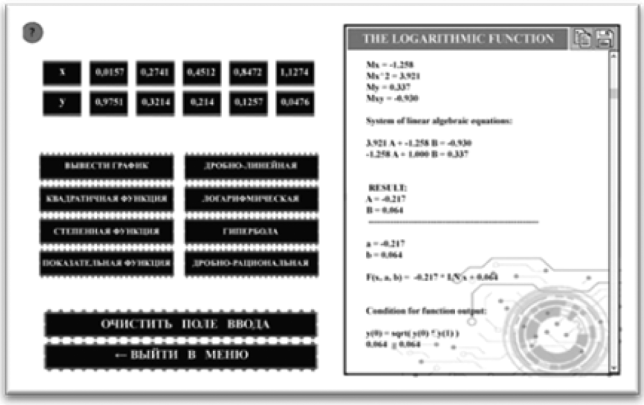

Рис. 17. Логарифмическая функция (часть 2)

На рисунке 18 показан график, полученный после нажатия на кнопку **«Вывести график»** из примера 5:

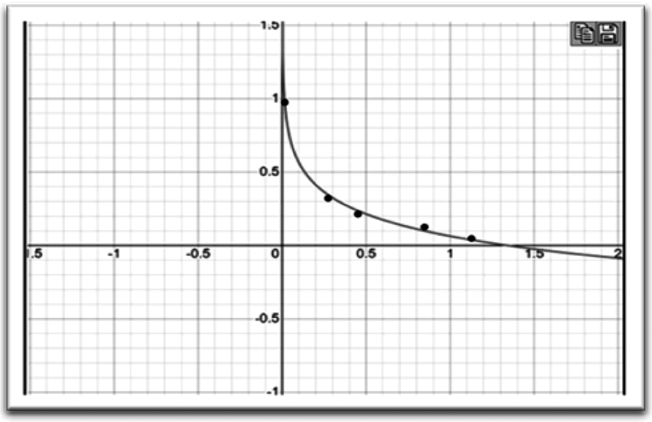

Рис. 18. График логарифмической функции

7. Гипербола

Будем искать приближающую функцию в виде:

$$F(x, a, b) = \frac{a}{x} + b.$$

Для перехода к линейной функции сделаем подстановку $u = \dfrac{1}{x}$, получим:

$$\Phi(u, a, b) = au + b.$$

Для нахождения приближающей функции в виде гиперболы значения аргумента в исходной таблице следует заменить обратными числами.

На рисунках 19 и 20 приведен *пример 6* нахождения приближающей функции в виде **гиперболы**:

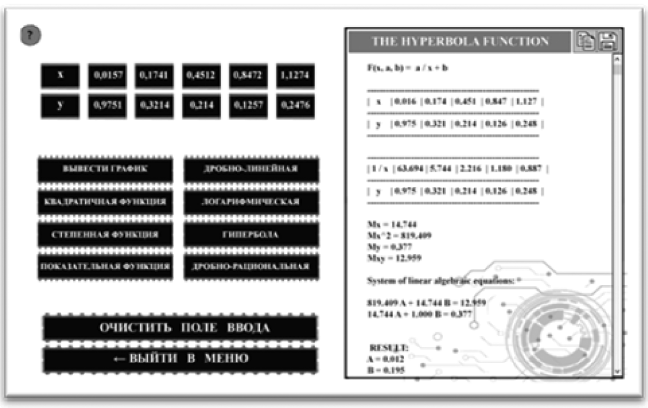

Рис. 19. Гипербола (часть 1)

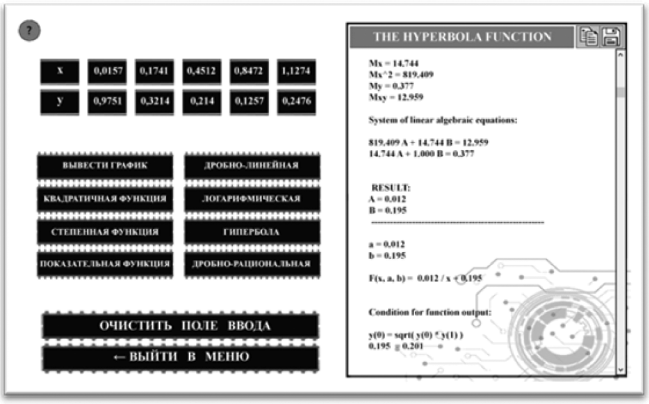

Рис. 20. Гипербола (часть 2)

На рисунке 21 показан график, полученный после нажатия на кнопку **«Вывести график»** из примера 6:

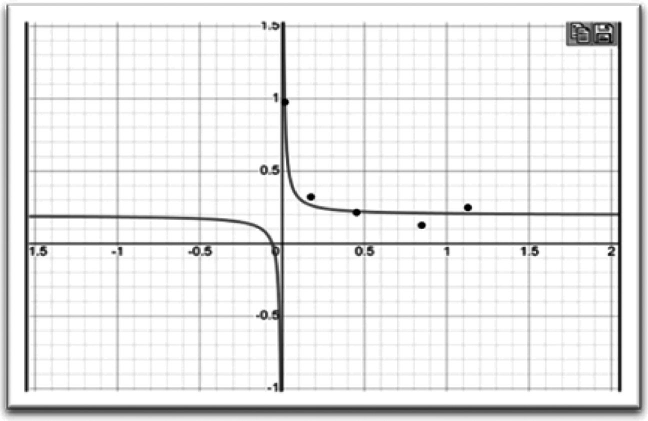

Рис. 21. График гиперболы

8. Дробно-рациональная функция

Предположим, что приближающую функцию необходимо искать в виде:

$$F(x,a,b) = \frac{x}{ax + b}.$$

Перепишем данное равенство в следующем виде:

$$\frac{1}{F(x,a,b)} = a + \frac{b}{x}.$$

Теперь задача сводится к случаю, рассмотренному в предыдущем пункте. Заменим значения x и y обратными величинами:

$$z = \frac{1}{x}, u = \frac{1}{y}.$$

Построим новую таблицу, учитывая обозначения, и будем искать приближающую функцию в виде:

$$u = bz + a.$$

На рисунках 22 и 23 приведен *пример 7* нахождения приближающей функции в виде **дробно-рациональной функции**:

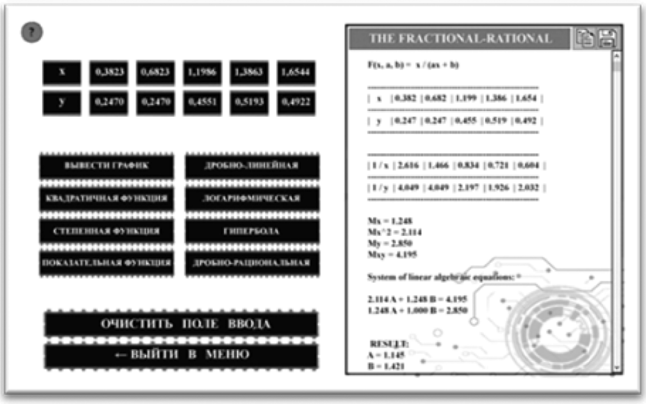

Рис. 22. Дробно-рациональная функция (часть 1)

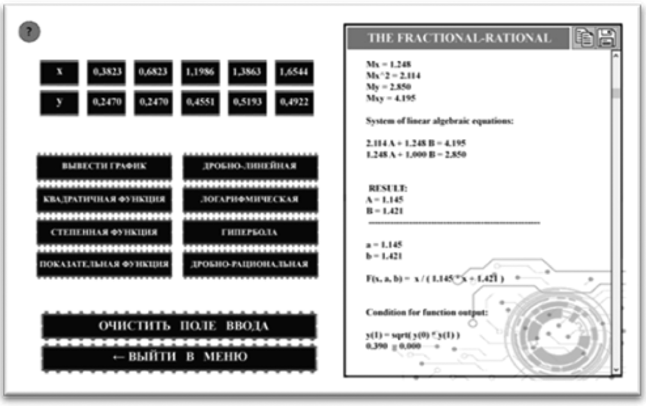

Рис. 23. Дробно-рациональная функция (часть 2)

На рисунке 24 показан график, полученный после нажатия на кнопку **«Вывести график»** из примера 7:

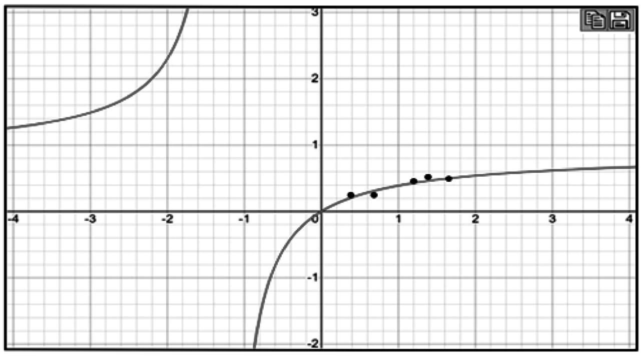

Рис. 24. График дробно-рациональной функции

Подводя итоги, можно сказать, что была разработана и реализована программа, написанная на языке программирования C++, представляющая собой калькулятор аппроксимации функции путем нахождения приближающей функции в виде основных элементарных функций. Таким образом, все поставленные задачи решены, и цель работы достигнута.

ЛИТЕРАТУРА

1. Георгиева М.А., Ксенофонтов А.С., Блиева О.З., Дзамихова Ф.Х., Езаова Б.З., Тлепшева Д.А. РАЗРАБОТКА КАЛЬКУЛЯТОРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и Технические Науки. — 2023. — №01. — С. 68–76 DOI 10.37882/2223–2966.2023.01.10
2. Роберт Лафоре. Объектно-ориентированное программирование в С++. Электронное издание.
3. Георгиева М.А., Езаова А.Г., Арванова С.М., Чочиева А.М., Лосанов Х.Х., Тлепшева Д.А. Разработка калькулятора для вычисления интегралов численным методом по формулам Ньютона-Котеса // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и Технические Науки. — 2022. — №10/2. — С. 44–54 DOI 10.37882/2223-2966.2022.10-2.07
4. Бердышев В.И., Петрак Л.В. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения. Электронное издание.
5. А.М. Данилов, И.А. Гарькина. Интерполяция, аппроксимация, оптимизация: анализ и синтез сложных систем. Электронное издание.