РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ ТЕХНИЧЕСКОМ ОБСЛУЖИВАНИИ ВОЗДУШНЫХ СУДОВ

Коптев Анатолий Никитович
Д.т.н., профессор, Самарский национальный исследовательский университет им. С.П. Королёва
eat@ssau.ru
Набиев Даврон Турахонович
Аспирант, Самарский национальный исследовательский Университет имени академика С.П. Королёва
asteroy9191@gmail.com
Матвейчук Ирина Алексеевна
Аспирант, Самарский национальный исследовательский Университет имени академика С.П. Королёва
irina.vasileva.14@mail.ru
Высоцкая Мария Владимировна
Аспирант, Самарский национальный исследовательский Университет имени академика С.П. Королёва
manya_93@mail.ru
Наджари Хоссейн
Аспирант, Самарский национальный исследовательский Университет имени академика С.П. Королёва
hoseinnadjari@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается математическая модель задачи распределения ресурсов, позволяющие решать класс задач распределения ресурсов в планировании, управлении и проектировании процесса обучения. Так же для решения поставленных задач рассматривается закон распределения, а именно нормальный закон распределения и фундаментальные положения теории вероятностей, а также основные положения использования теории вероятности для принятия оптимальных решений при техническом обслуживании воздушного судна (ВС).

Ключевые слова: Математическая модель; воздушное судно; нормальный закон распределения; теория вероятностей; техническое обслуживание.

DEVELOPMENT OF THE SYSTEM OF MATHEMATICAL MODELS FOR DECISION-MAKING WITH THE TECHNICAL SERVICE OF THE AIRCRAFT

A. Koptev
D. Nabiev
I. Matveychuk
M. Vysotskaya
H. Nadjari

Summary. The mathematical model of the problem of resource allocation is considered in the article, allowing solving a class of resource allocation problems in planning, managing and designing the learning process. The laws of distribution, namely the normal law of distribution and the fundamental provisions of the probability theory, as well as the basic provisions of the use of the probability theory for making optimal decisions in the maintenance of the aircraft (aircraft), are also considered to solve the tasks.

Keywords: Mathematical model; aircraft; normal law of distribution; probability theory; Maintenance;.

Введение

Задачи поддержания летной годности, касающиеся процедур оценки, методологии и диагностирования технического состояния воздушного судна, нуждаются в формальных методах принятия решений. Значительная часть управленческих решений сводится по существу к задачам составления стратегических планов, а по содержанию их можно рассматривать как решение задач распределения ресурсов при техническом обслуживании, математической моделью которых служит задача линейного программирования:

$$\begin{cases} W = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le b_i \\ d_j \le x_j \le D_j; i = \overline{l,m}; j = \overline{l,n}, \end{cases} \quad (1)$$

где c_j — коэффициент в целевой функции (общее число известных работ по плану на определенный период); a_{ij} — норма расхода i–го ресурса (числа инженеров или техников) для реализации одного j–го заказа (работы по техническому обслуживанию воздушных судов); b_i — располагаемый ресурс (располагаемое общее количество инженеров условной службы по оперативному техническому обслуживанию); d_j и D_j — минимальное и максимальное допустимые значения x_j (неопределённое числоработ).

Как видно по формуле, если брать службу оперативного технического обслуживания любого аэродрома или авиакомпании, то получится, что основной задачей принятия управленческих решений является правильное распределение количества техников и инженеров, с учетом их опыта, навыков и особенностей на определенное количество работ по плану на смену, а также внеплановых работ, которые выявляются в ходе технического обслуживания. От правильного распределения ресурсов и времени зависит качество и количество выполненных работ.

В техническом обслуживании ВС, вышеуказанная система (1) является математической моделью методов распределения ресурсов. Все зависимости в данной модели являются линейными, иными словами, все переменные входящие в эту модель являются входят в переменные первой степени. В следствие этого построенную модель называют задачей линейного программирования [1]. С помощью таких задач возможно решать большой класс задач распределения ресурсов как в проектировании процессов обучения, так и в планировании и управлении при техническом обслуживании, что в дальнейшем мы и будем делать. При сравнении системы (1) с общей постановкой задачи оптимизации можно убедиться, что задача линейного программирования (1) является частным случаем задачи оптимизации в общем виде (2).

$W = f(x_j) \to \max(\min)$ — целевая функция;

$g_i(x_j) = 0$ — ограничения; (2)

$a_j \le x_j \le b_j$ — граничные условия;

$i = 1...m; \mathrm{j} = 1...\mathrm{n};,$

Постановка задачи

В зависимости от того, как определены величины a_{ij}, b_i, c_j (выделение i-количества инженеров или техников для выполнения j-количества технических работ, общее располагаемое количество инженеров в аэродроме или авиакомпании по оперативному техническому обслуживанию), выделяется два вида моделей — детерминированные и стохастические [2, 4].

В первом случае всегда будем считать, что в модели величины a_{ij}, b_i, c_j, являются строго определёнными, или детерминированными, и их точные значения известны. К сожалению, в реальных случаях не всегда наблюдается такая четкая определенность.

В качестве примера будем считать, что величина b_i обозначает имеющийся в наличии i — ресурс. Не вызывает сомнения, что достаточно часто мы не можем точно сказать, сколько будет поставлено ресурса в течение планируемого периода, так как эта величина, в свою очередь, зависит от выделенных фондов, соответствия качества ресурса предъявляемым требованиям, своевременности поставки и так далее. Следовательно, величина b_i зависит от множества различных факторов, которые заранее определить физически невозможно. При этом, чем больше период планирования, тем больше неопределенность в оценке возможного значения b_i. То же самое в полной мере относится к нормам расхода a_{ij} и коэффициентов целевой функции c_j.

Следовательно, есть все причины говорить, что в действительно работающих на данный момент задачах распределения ресурсов, величины a_{ij}, b_i, c_j, входящие в модели, имеющие зависимость от ряда случайных факторов, являются случайными величинами и не могут быть определены достоверно точно. В таком случае, объективно существует неопределенность и это невозможно отрицать. При этом, чем больше период нашего планирования, тем больше значение этой неопределённости.

Эту задачу можно выполнить если применить фундаментальное положение теории вероятностей: зависимостью правильности или другими словами, достоверности результатов от числа попыток и с так называемым нормальным законом распределения, который в данном случае играет особенно решающую роль в представлении случайных явлений.

Рассмотрим основные моменты применения теории вероятности для принятия решений при техническом обслуживании воздушного судна.

Основные понятия и определения измерения случая

Введем некоторые понятия для удобного применения некоторых отдельно взятых определений теории вероятностей: 1. Всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти назовём событием. Ответом на вопрос «произошло ли событие?» может быть либо «да», либо «нет», среднего не дано. Для нашего случая примером события будем считать своевременное, полное проведение технического обслуживания, т.е. событием будем считать либо проведение полноценного технического обслуживания на определенном самолете, либо его отсутствие.

Будем иметь ввиду, что будет три варианта события: 1. Достоверные, 2. Невозможные и 3. Возможные. Достоверным называют такое событие, которое обязательно, несмотря ни на что должны произойти. Достоверными событиями являются, например, выпадение всякого номера, выпадающего на верхней стороне грани игральной кости, при этом абсолютно не имеет никакого значения какой номер из шести возможных выпадет. Достаточно самого факта появления числа. Иной пример –расход определенных ресурсов и сил при выпуске продукции.

Невозможным считают такое событие, которое не может произойти. В качестве примера невозможного события можно провести проведение технического обслуживания без использования самолета. Логично, что если не будет самого самолета, то и не может быть никакой работы на нем.

Возможное событие — это такое событие, которое произойдет точно. Примером возможного события является выполнение плана работ на техническое обслуживание на 100% [3].

Для выражения возможности события используют численную меру. Такую численную меру возможности события называют вероятностью. Вероятность события A, т.е. $P(A)$, можно вычислить по формуле ниже, где m — число случаев, когда событие A может произойти; n — общее число случаев.

$$P(A) = m / n$$

Очевидно, что вероятность невозможного события равна нулю, достоверного –единице, возможного — от нуля до единицы. Вероятность характеризует возможность событий в будущем. Для оценки того, как часто события уже происходили, используют понятие частоты. Частота события A обозначается $P^*(A)$, где m^* показывает, сколько раз событие произошло, n — общее число произведенных испытаний.

$$P^*(A) = m^*/n,$$

Вдобавок к выше перечисленным введем ещё одно понятие. События, которые исключают друг друга, т.е. факт происхождения одного события автоматически исключает другое событие назовём несовместными. Очевидно, что сумма вероятностей всех несовместных событий равна единице.

Случайные события будем охарактеризовать числами, что применяется довольно часто. Такие числа называют случайными величинами. Случайной величиной может оказаться любая допустимая величина в том или ином случае. К примеру, в игральной кости есть 6 граней т.е. может быть 6 вариантов значений, следовательно, эта случайная величина может оказаться как 1 так и 6. Заранее случайная величина всегда неизвестна. Из примера по техническому обслуживанию, случайной величиной является количество технических работ, которые успешно были выполнены из общего количества работ. Конкретное измеренное значение случайной величины называют ее реализацией. Различные реализации случайной величины относят к несовместным событиям.

Случайная величина одним конкретным числом описана быть не может. Ее можно описать либо количественными характеристиками, либо законом распределения. Наиболее распространенными характеристиками случайной величины являются: математическое ожидание; дисперсия; среднее квадратическое отклонение; коэффициент вариабельности [5].

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины, обозначается M_x, $M[x]$ или x и определяется по зависимости, где n — число реализации; x — значение случайной величины в i –той реализации.

$$M_x = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

Дисперсия D_x характеризует разброс значений случайной величины:

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1},$$

Так как размерность дисперсии равна квадрату размерности самой случайной величины, использовать дисперсию для относительной оценки разброса значений случайной величины не представляется возможным. В связи с этим разброс оценивают средним квадратическим отклонением σ_x. Между дисперсией и средним квадратическим отклонением существует зависимость

$\sigma^2 = D_x$ или $\sigma_x = \sqrt{D_x}$., следовательно,

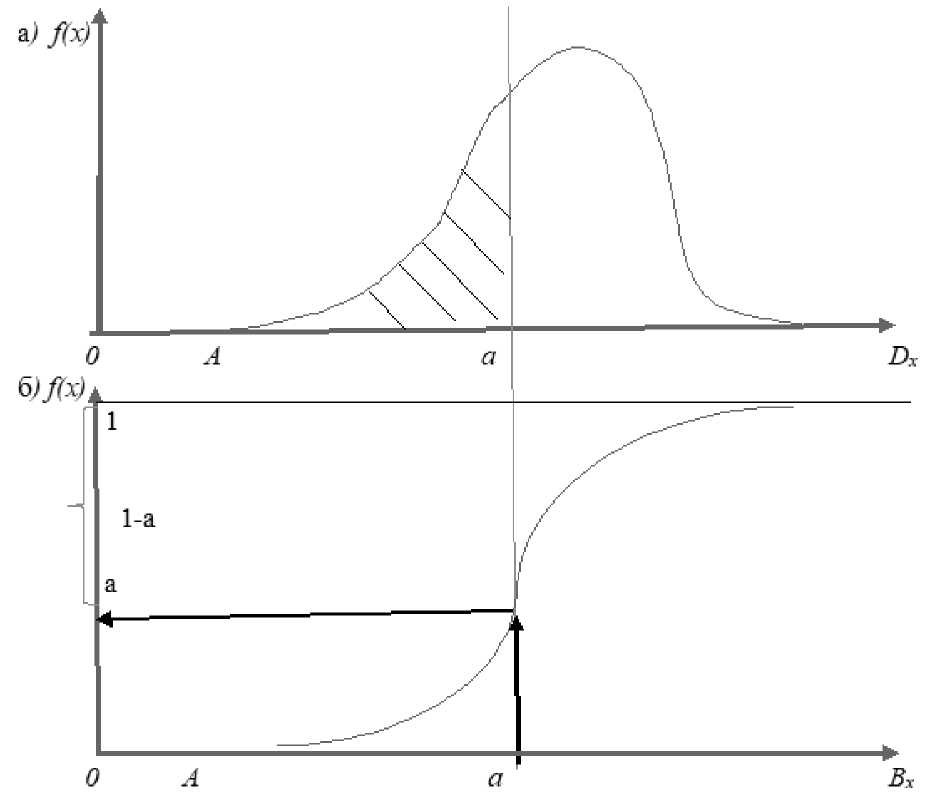

Рис. 1 График плотности распределения случайной величины x в интервале A≤x≤B

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_1 - \bar{x}\right)^2}{n-1}}$$

Удобной характеристикой случайной величины, которая показывает относительное значение разброса случайной величины, является коэффициент вариабельности.

$$\mu_x = \sigma_x / \bar{X}$$

Закон распределения даёт нам возможность и показывает, какова вероятность появления каждого возможного значения случайной величины или почему суммарная вероятность появления случайной величины, равная единице, распределена между их возможными значениями. В общем, рассматриваемый нами закон распределения устанавливает чёткие связи между возможными значениями случайной величины и вероятностями их появления. В настоящее время существует очень много вариантов законов распределения. Наибольшее применение на практике получил нормальный закон распределения. С помощью нормального закона распределения решают очень большое число самых различных задач, в том числе задачи принятия оптимальных решений в условиях неопределённости [6].

Нормальный закон распределения имеет две формы представления: 1. Плотность распределения и 2. Функцию распределения. График плотности распределения случайной величины x в интервале $A \le x \le B$, показан на рисунке (1). С помощью этого графика можно решать различные задачи. Например, можно определить: чему равна вероятность того, что случайная величина x будет не больше величины a, т.е. $P\left(x \le a\right)$. Оказывается, эта вероятность равна заштрихованной площади. Зная $P\left(x \le a\right)$, нетрудно установить вероятность того, что случайная величина x будет не меньше величины a, т.е. Очевидно, что $P\left(x \le a\right) + P\left(x \ge a\right) = 1$. Следовательно, что соответствует не заштрихованной площади на рис. 1, a.

Площадь криволинейной фигуры с помощью нормального закона распределения вычислят достаточно сложно. В связи с этим, для решения практических задач широко применяют другую форму закона распределения — функцию распределения $f(x)$, график которой приведен на рис. 1, б. Вероятность $P\left(x \le a\right)$, определяемая на рисунке 1, a как площадь криволинейной фигуры, на рисунке 1б равна ординате кривой $f(x)$. Следовательно, $P\left(x \le a\right) = f\left(a\right)$ откуда $P\left(x \ge a\right) = 1 - f\left(a\right)$.

Для облегчения расчётов при работе с нормальным законом распределения от нормальной случайной величины x переходят к центрированной нормированной случайной величине $t = (x - x)/\sigma_x$

При этом, $P(x \le a) = F(t)$

Для определения $F(t)$ имеются специальные таблицы.

По значениям $F(t)$ для некоторых t строится график, по которому легко определить интересующие нас величины.

Используя функцию распределения $F(t)$ мы можем также решать и обратную задачу, которая формулируется так: при каком значении t_a вероятность появления случайной величины удовлетворяла бы условию:

$P(t \le t_a) = a$, где a — заданный уровень вероятности.

Следовательно, возникающие на практике задачи принятия решений достаточно часто представляет собой задачи стохастического программирования (СТП). Мы уже знаем, что случайные величины могут определяться как реализациями, так и их количественными характеристиками, и законом распределения. Используем характеристики случайных величин и законы их распределения при решении задач распределения ресурсов с учётом неопределённости при техническом обслуживании ВС.

Разработка математической модели задачи распределения ресурсов

Создание математической модели распределения ресурсов Условной базы технического обслуживания «А», так как какие-то работы в рамках данного исследования были проведены на базе по техническому обслуживанию, начнём с рассмотрения целевой функции.

Если величины c_j, которые входят в целевую функцию, являются случайными, то мы можем написать задачу стохастического программирования в двух вариантах представления M — и P — представлении. При M — варианте целевая функция записывается так:

$$W = M\left[\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right] \to \max(\min),$$

что означает максимизацию (минимизацию) математического ожидания целевой функции. От математического ожидания целевой функции можно переходить к математическим ожиданиям случайных величин c_j, которые будем обозначать c_j. Тогда запишем:

$$M\left[\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right] = \left[\sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j\right].$$

Итоговый вид, $W = \left[\sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j\right] \to \max(\min)$

В таком случае, при M — варианте задачи СТП для ее решения требуется найти такие значения искомых переменных x_j, при которых математическое ожидание целевой функции будет иметь оптимальное т.е. максимальное (или минимальное) значение [7].

При P –варианте задача формулируется иначе. Для начала должно быть задано максимально возможное наихудшее значение целевой функции. В случае максимизации задается минимально допустимое значение W_{min} и требуется чтобы условие было принято следующим образом $W \ge W_{min}$. При минимизации будет задано максимально возможное значение W_{max} и требуется соблюдать условие $W \le W_{max}$.

Смысл P- варианта в том, чтобы максимизировать вероятность целевой функции быть не хуже предельно возможного значения в случае нахождения нужных значений x_j,

Целевая функция в P — варианте будет иметь вид:

при максимизации: $W = \left[\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge W_{\min}\right] \to \max$,

при минимизации: $W = \left[\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge W_{\max}\right] \to \max$

В случае, если целевая функция минимизируется, то необходимо стремиться к минимуму. Как в одном случае с минимизацией, так и в другом случае с максимизацией, надо стремиться к максимизации вероятности. В случае с максимизацией целевой функции наименьшее возможное значение заедается как W_{min}, а в другом случае с минимизацией целевой функции как W_{max}. И в связи с этим, для увеличения значение целевой функции в максимизации, надо увеличивать значение целевой функции W_{min}.И также для другого случая надо уменьшать значение W_{max} в минимизации. Из приведённого видно, что M– и P– варианты имеют принципиальные отличия.

Рассмотрим теперь, как учитывается фактор неопределённости при записи ограничений. В ограничении:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \le b_i,$$

входят величины a_{ij} и b_i. Учитывать, что данные величины являются случайными будем так же, как и для целевой функции, в двух вариантах. В первом варианте случайные величины определяются их математическими ожиданиями и ограничения записываются в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} \le \overline{b}_i,$$

где a_{ij} и b_i — математические ожидания случайных величин a_{ij} и b_i. В этом случае, стохастический характер задачи, не будет учитываться. Во втором варианте каждое i –е ограничение должно записаться:

$$P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\right] \ge a_i \text{ т.е. } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \tag{3}$$

Это означает, что вероятность выполнения каждого ограничения должна быть не менее назначенной величины a_i. Задачу, включающую условие (19), называют задачей с вероятностными ограничениями. Объединив целевую функцию и ограничения, можем записать задачу СТП в двух вариантах, М- и Р-. При M — варианте задачи СТП имеет вид

$$\begin{cases} W = \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j \to \max(\min) \\ P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le b_i\right] \ge a_i \quad (4) \\ d_j \le x_j \le D_j; i = \overline{l,m}; j = \overline{l,n}, \end{cases}$$

При P — варианте задачи СТП максимизация и минимизация будут различаться. При максимизации (слева) и минимизации (справа) с учётом целевой функции P — вариант будет иметь вид:

$$\begin{cases} W = P\left[\sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j \ge W_{\min}\right] \to \max \\ P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le b_i\right] \ge a_i \\ d_j \le x_j \le D_j; i = \overline{l,m}; j = \overline{l,n}, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} W = P\left[\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le W_{\max}\right] \to \min \\ P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le b_i\right] \ge a_i \\ d_j \le x_j \le D_j; i = \overline{l,m}; j = \overline{l,n}, \end{cases} \tag{6}$$

Задачи (4) — (6), как в M–, так и в P– варианте непосредственно решены быть не могут. Возможным методом решения этих задач является переход к их детерминированным эквивалентам. В основе этого перехода лежит использование закона распределения случайных величин.

В дальнейшем принимаем, что случайные величины a_j, b_j, c_j подчиняются нормальному закону распределения. В этом случае детерминированный эквивалент целевой функции в P — варианте можно записать следующим образом: при максимизации (слева) и минимизации (справа) целевой функции, где c_j, σ_j — математическое ожидание и дисперсия случайной величины c_j.

$$W = \frac{\sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j - W_{\min}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma^2 x^2}} \to \max, \tag{7}$$

$$W = \frac{W_{\max} - \sum_{j=1}^{n} \overline{c}\; x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma^2 x^2}} \to \max \tag{8}$$

Приведённые зависимости достаточно сложны для вычислений, широкого распространения на практике не имеют, поэтому в дальнейшем P– вариант задачи СТП мы рассматривать не будем. Что же касается детерминированного эквивалента для M– постановки задачи СТП он будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & W = \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j \to \max(\min); \\ & \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} \le \overline{b} - t_{ai} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2}; \\ & d_j \le x_j \le D_j; i = \overline{i,m}; j = \overline{i,n}; \end{aligned} \tag{9}$$

где c_j– математическое ожидание случайной величины c_j; a_{ij}, σ_{ij}^2 — соответственно математические ожидания и дисперсии случайных величин a_{ij} и b_i; t_{ai}– значение t в нормальном законе распределения, соответствующее заданному уровню вероятности соблюдения ограничений a_i, θ_i^2 — дисперсия ресурса b_i. В модель переменные x_j входят во второй степени, а из их суммы извлекается квадратный корень. Значит, ограничения этой модели являются нелинейными.

Для решения нелинейной задачи наиболее приемлемым является метод кусочно-линейной аппроксимации. При решении задачи этим методом они сводятся к задачам линейного программирования большей размерности. А задачи линейного программирования на ЭВМ решаются уже известным нам симплекс–методом с помощью надёжных программных средств.

Перейдем к анализу модели. Для удобства введем обозначение:

$$\xi_i = t_{ai} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2}, \tag{10}$$

Тогда детерминированный эквивалент задачи СТП можно записать следующем образом:

$$\begin{cases} W = \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j \to \max(\min) \\ \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} x_{ij} \le \overline{b}_i - \xi_i \\ d_j \le x_j \le D_j; i = \overline{l,m}; j = \overline{l,n}, \end{cases} \tag{11}$$

Результаты

Из сравнения этой системы с задачей линейного программирования для детерминированных величин видно, что детерминированный эквивалент задачи СТП отличается от задачи линейного программирования следующем: во-первых, выполнен переход от значений детерминированных величин a_{ij}, b_i, c_i к математическим ожиданиям случайных величин a_{ij}, b_i, c_i; во-вторых, во всех ограничениях располагаемый ресурс уменьшился на величину ξ_i. Значит, и это очень важно, чует того, что величины a_{ij} и b_i являются случайными, приводит фактически к уменьшению располагаемого ресурса. За принятие решений в условиях неопределённости приходится платить. И такой платой оказывается необходимость в дополнительном ресурсе ξ_i. Правда, этот дополнительный ресурс может остаться неиспользованным, но для гарантированного выполнения плана иметь его необходимо. В этом и проявляется неопределённость.

Заключение

Задачи, возникающие на практике при принятии решений достаточно, часто представляет собой задачи стохастического программирования (СТП). Мы уже знаем, что случайные величины могут определяться как реализациями, так и их количественными характеристиками, и законом распределения. Примерно представляя количество случайных величин для непрерывной работы предприятия при техническом обслуживании для гарантированного выполнения всех работ без изменения ее объёма и качества, располагаемый ресурс нужно увеличить на коэффициент ξ_i. Хотя этот выделенный ресурс может быть не использован, но лучше будет если предприятие понесут маленькие затраты на оплату труда, чем большие потери. Плата за принятие решений довольно велика и при каждом планировании работы нужно учитывать факторы, которые могут неопределёнными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Банди Б. Основы линейного программирования: Пер. с англ.—М.: Радио и связь, 1989.—176 с.
2. Мохрачева Л. П. Типовые математические схемы моделирования. Примеры и задачи: учебное пособие /- Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2018.— 144 с.
3. Глухов В. В. Менеджмент: Учебник для ВУЗов. 3-е изд.—СПб.: Питер, 2008.—608 с.
4. Карманов В. Г. Математическое программирование: Учебное пособие, 5-е издание, -М.: Физматлит, 2004.—264с.
5. Месарович М., Токахара Я. Общая теория систем: математические основы. М., 1978.
6. Соколов Е. Н. Психофизиология принятия решений / Нормативные и дескриптивные модели принятия решений. Ред. Б. Ф. Ломов и др. М.: Наука, 1981.С. 75–83.
7. Агальцов В.П., Валдайская И. В. Математические методы в программировании: Учёб.: — М.: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М, 2006.— 224с.
8. Киндинова В. В. Модель анализа проблем объекта складской логистики в авиации // Труды МАИ. 2017. № 94. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=81157