

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ ЗЕМЛИ ДЛЯ ДОЛГОСРОЧНОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ МИРОВЫХ ПОТРЕБНОСТЕЙ В ЭНЕРГОРЕСУРСАХ И СТРАТЕГИЧЕСКОГО ПЛАНИРОВАНИЯ РАЗВИТИЯ НЕФТЕГАЗОВОГО КОМПЛЕКСА

MATHEMATICAL MODELS OF DYNAMICS OF POPULATION OF EARTH FOR LONG-TERM FORECASTING OF WORLD NEEDS FOR ENERGY RESOURCES AND STRATEGIC PLANNING OF DEVELOPMENT OF AN OIL AND GAS COMPLEX

**I. Samarin
A. Fomin**

Summary. The known mathematical models of dynamics of total number of the population on Earth are considered and critically analysed. For accounting of the new significant factors shown in the last decades on the basis of several consecutive stages of generalization the new mathematical model is offered. It is based on the differential equation of dynamics of population. Parameters of this model are determined from the solution of a problem of mathematical programming on minimization of a mean square relative mismatch between model and real values by the number of the people living on Earth. High precision of modeling at the level of 0,33% is as a result provided. Use of mathematical model for forecasting shows that there is a limit of growth of population approximately in 12 billion people. His existence is caused by application of the effective state measures for restriction of growth rate of the population operating within several decades in many countries. In the offered mathematical model global demographic transition contacts concrete measures for restriction of birth rate, allowed to reduce average growth rate more, than by 3 times.

Keywords: hyperbolic law, demographic transition, dynamic, differential equation, life-saving technologies, mathematical model, method, minimization, parameter, growth limit, statistical series, rate, formalization, population, numerical methods, objective function..

Самарин Илья Вадимович

*К.т.н., доцент, РГУ нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина
ivs@gubkin.ru*

Фомин Александр Николаевич

*Д.т.н., н.с., Военная Академия РВСН им. Петра Великого (Москва)
sad116@mail.ru*

Аннотация. Рассмотрены и критически проанализированы известные математические модели динамики общей численности населения на Земле. Для учёта новых значимых факторов, проявившихся в последние десятилетия, на основе нескольких последовательных этапов обобщения предложена новая математическая модель. Она основана на дифференциальном уравнении динамики численности населения. Параметры этой модели определяются из решения задачи математического программирования по минимизации среднеквадратического относительного рассогласования между модельными и реальными значениями по количеству живущих на Земле людей. В результате обеспечена высокая точность моделирования на уровне 0,33%. Использование математической модели для прогнозирования показывает, что имеется предел роста численности населения примерно в 12 млрд. человек. Его существование обусловлено применением эффективных государственных мер по ограничению скорости роста населения, действующих в течение нескольких десятков лет во многих странах. В предлагаемой математической модели глобальный демографический переход связывается с конкретными мерами по ограничению рождаемости, позволившими снизить средний темп роста более чем в 3 раза.

Ключевые слова: гиперболический закон, демографический переход, динамика, дифференциальное уравнение, жизнеспасающие технологии, математическая модель, методика, минимизация, параметр, предел роста, статистический ряд, темп, формализация, численность населения, численные методы, целевая функция.

Введение

Количество проживающих на Земле людей является одним из главных системообразующих факторов, во многом определяющих будущее развитие человечества. Если ещё 100 лет назад увеличение чис-

ленности населения в большинстве стран представляло основной драйвер их экономического и политического развития, то в последние десятилетия оно изменило свой «знак», трансформировавшись из достоинства в большую проблему. Если не принять неотложных и глобальных мер по её решению, она может не только

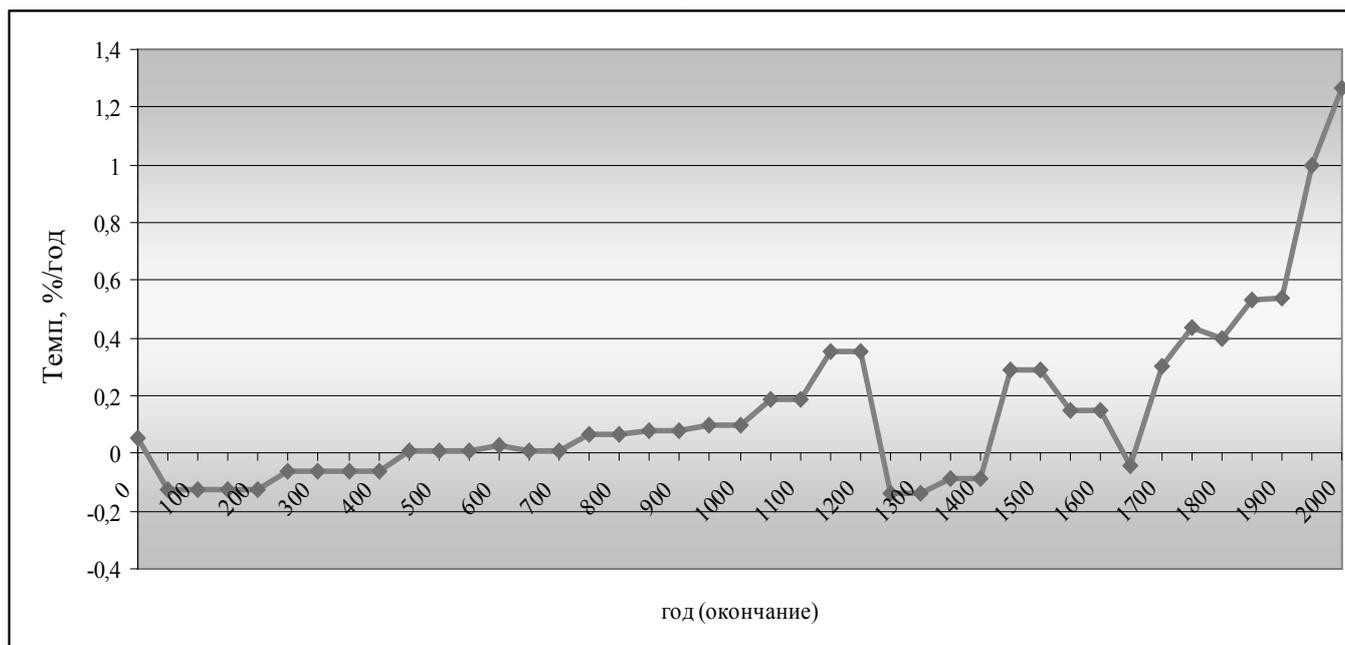


Рис. 1. Темп изменения численности населения на Земле в 0–2000 гг.,%/год

существенно деформировать многие аспекты жизнедеятельности людей во все мире, но и обострить другие фундаментальные проблемы по схеме «идеального шторма».

Конечно, при анализе будущих вызовов необходимо учитывать не только общую численность населения во всём мире, но и распределение количества людей по разным странам и регионам. Но при этом общая численность населения представляет главный тренд, который модулируется специфическими региональными особенностями.

Большое количество людей в мире провоцирует возникновение войн, в т.ч. мировых, военных конфликтов на экономической, национальной и религиозной почвах, способствует обострению экологических проблем.

Особую значимость рост численности проживающих на Земле людей представляет для сырьёвого сектора мировой экономики. Такие проблемы, как обеспечение продовольствием, необходимым количеством пресной воды, энергоресурсами, металлами вступают во всё усиливающее противоречие с высоким темпом роста численности населения. Несмотря на совершенствование технологий извлечения и получения сырья, в ближайшее время они уже могут не успевать за ростом населения в мире. В первую очередь это относится к нефтегазовому сектору, который уже фактически презентует надвигающийся кризис адаптационными планами освоения дорогостоящих и труднодоступных месторождений с соот-

ветствующим увеличением цен на нефть и газ. Коротко говоря, от хорошей жизни в Арктику не пойдёшь.

Поэтому для формирования обоснованных долгосрочных прогнозов и стратегических планов развития необходимо постоянно совершенствовать методический аппарат научного прогнозирования глобальных и фундаментальных факторов роста на основе новой информации последних десятилетий, в частности — по увеличению населения в мире.

Модели динамики численности населения в мире базируются на известных данных по количеству проживающих на Земле людей. По данным работ [1–3] они представлены в табл. 1. Мы ограничились временным периодом длительностью 2017 лет, т.е. новой эрой, оставляя историкам исследование этого интересной темы в период от нескольких миллионов — сотен тысяч лет до новой эры.

На основе данных табл. 1 определяются темпы роста численности населения на Земле — рис. 1.

Видно, что до 1150 г. темпы роста были относительно низкими, а в некоторые периоды известных национальных войн в Европе и Азии — даже отрицательными. Затем, примерно с 1700 г., скорость роста увеличилась, и к 1900 г. численность превысила 1,6 млрд. человек.

А после окончания Первой мировой войны скорость роста населения выросла ещё в 2–4 раза (рис. 2),

Таблица 1. Исходные данные по динамике численности населения в мире

| № п.п. | Год (окончание) | Численность населения, млрд. человек |
|--------|-----------------|--------------------------------------|
| 1 | 0 | 0.285 |
| 2 | 200 | 0.223 |
| 3 | 400 | 0.198 |
| 4 | 500 | 0.2 |
| 5 | 600 | 0.206 |
| 6 | 700 | 0.208 |
| 7 | 800 | 0.222 |
| 8 | 900 | 0.24 |
| 9 | 1000 | 0.265 |
| 10 | 1110 | 0.32 |
| 11 | 1200 | 0.455 |
| 12 | 1300 | 0.396 |
| 13 | 1400 | 0.362 |
| 14 | 1500 | 0.483 |
| 15 | 1600 | 0.562 |
| 16 | 1650 | 0.55 |
| 17 | 1700 | 0.64 |
| 18 | 1750 | 0.795 |
| 19 | 1800 | 0.969 |
| 20 | 1850 | 1.265 |
| 21 | 1900 | 1.656 |
| 22 | 1910 | 1.75 |
| 23 | 1920 | 1.87 |
| 24 | 1930 | 2.07 |
| 25 | 1940 | 2.3 |
| 26 | 1950 | 2.540807495 |
| 27 | 1951 | 2.586957085 |
| 28 | 1952 | 2.632787502 |
| 29 | 1953 | 2.678896551 |
| 30 | 1954 | 2.725766615 |
| 31 | 1955 | 2.773762631 |
| 32 | 1956 | 2.823131978 |
| 33 | 1957 | 2.874013095 |
| 34 | 1958 | 2.926452535 |
| 35 | 1959 | 2.981394663 |
| 36 | 1960 | 3.036978803 |
| 37 | 1961 | 3.094237385 |
| 38 | 1962 | 3.153380494 |
| 39 | 1963 | 3.214727506 |
| 40 | 1964 | 3.278555015 |
| 41 | 1965 | 3.345008017 |
| 42 | 1966 | 3.414025267 |
| 43 | 1967 | 3.485254803 |
| 44 | 1968 | 3.558117546 |
| 45 | 1969 | 3.632007495 |
| 46 | 1970 | 3.706609481 |
| 47 | 1971 | 3.781872344 |
| 48 | 1972 | 3.857602433 |

Продолжение таблицы. 1. Исходные данные по динамике численности населения в мире

| № п.п. | Год (окончание) | Численность населения, млрд. человек |
|--------|-----------------|--------------------------------------|
| 49 | 1973 | 3.933417605 |
| 50 | 1974 | 4.008989361 |
| 51 | 1975 | 4.084105387 |
| 52 | 1976 | 4.158756254 |
| 53 | 1977 | 4.233302166 |
| 54 | 1978 | 4.308410980 |
| 55 | 1979 | 4.384771573 |
| 56 | 1980 | 4.462682114 |
| 57 | 1981 | 4.542088143 |
| 58 | 1982 | 4.62313168 |
| 59 | 1983 | 4.706216901 |
| 60 | 1984 | 4.791660298 |
| 61 | 1985 | 4.898970836 |
| 62 | 1986 | 4.98961623 |
| 63 | 1987 | 5.081956782 |
| 64 | 1988 | 5.174616988 |
| 65 | 1989 | 5.266183401 |
| 66 | 1990 | 5.355950662 |
| 67 | 1991 | 5.443722939 |
| 68 | 1992 | 5.529621549 |
| 69 | 1993 | 5.613760957 |
| 70 | 1994 | 5.696335791 |
| 71 | 1995 | 5.777414187 |
| 72 | 1996 | 5.856964684 |
| 73 | 1997 | 5.935153167 |
| 74 | 1998 | 6.012508224 |
| 75 | 1999 | 6.089825349 |
| 76 | 2000 | 6.167406568 |
| 77 | 2001 | 6.245218155 |
| 78 | 2002 | 6.323402931 |
| 79 | 2003 | 6.402104428 |
| 80 | 2004 | 6.481482361 |
| 81 | 2005 | 6.561634842 |
| 82 | 2006 | 6.642621707 |
| 83 | 2007 | 6.724367437 |
| 84 | 2008 | 6.806802897 |
| 85 | 2009 | 6.889811477 |
| 86 | 2010 | 6.973271757 |
| 87 | 2011 | 7.057184484 |
| 88 | 2012 | 7.141539483 |
| 89 | 2013 | 7.22615473 |
| 90 | 2014 | 7.310679524 |
| 91 | 2015 | 7.397776362 |
| 92 | 2016 | 7.486520598 |
| 93 | 2017 | 7,577 (оценка) |

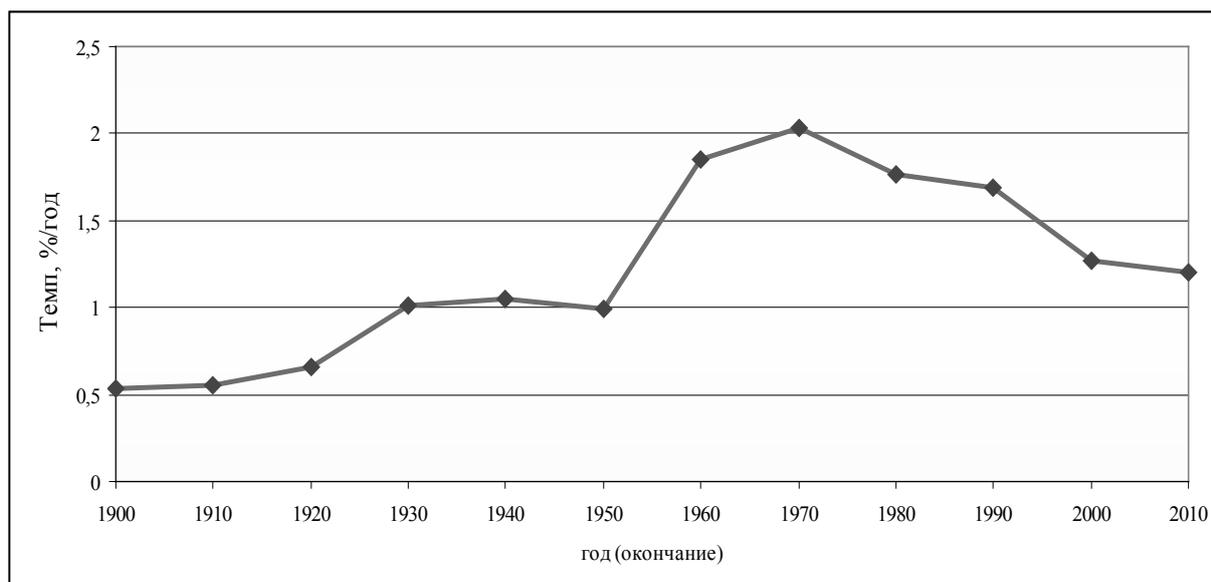


Рис. 2. Темп изменения численности населения на Земле в 1900–2010 гг.,%/год

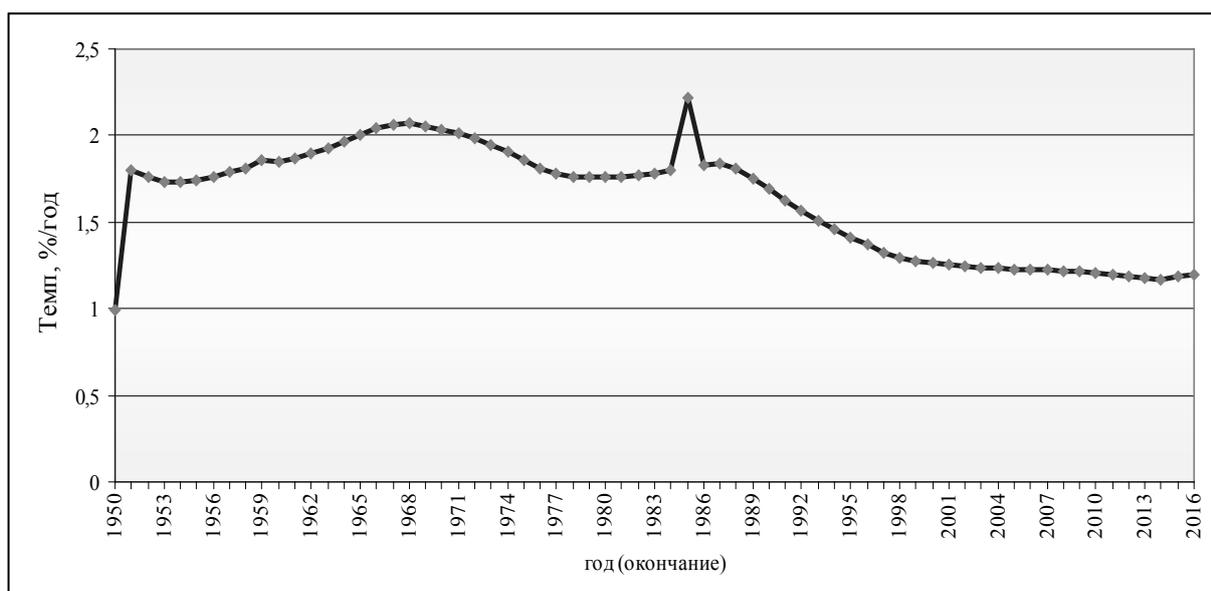


Рис. 3. Темп изменения численности населения на Земле в 1950–2016 гг.,%/год

а к окончанию 2017 г. ожидается что число людей на Земле может достигнуть около 7,6 млрд. (табл. 1).

Но существуют и некоторые позитивные тенденции изменения глобальной демографической ситуации: после 1968 г. темпы стали замедляться (рис. 3).

Мы пока не станем акцентировать внимание на странном поведении темпа роста около 1986 г. Возможно, оно

обусловлено каким-то изменением порядка формирования статистических данных. Но может быть, это знак проявления неких важных закономерностей: достаточно вспомнить, что происходило в мире в 1985–1986 гг., и предположить, как это могло стимулировать рост рождаемости.

Важно другое: после 1968 г. наблюдается снижение темпов роста общей численности населения в мире,

Таблица. 2. Модель 1 (до 1960 г.)

| Параметр | Год t_0 начала данных | | | | | | | |
|--|-------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|
| | 0 | 500 | 1000 | 1500 | 1600 | 1700 | 1800 | 1900 |
| Среднее относительное рассогласование Δ_0 , % | 14,23 | 9,67 | 9,56 | 4,25 | 3,37 | 2,62 | 2,4 | 1,73 |
| C , млрд. чел. × лет | 281,73 | 267,45 | 255,54 | 230,3 | 224,44 | 222,77 | 226,3 | 210,1 |
| T_1 , годы | 2061,15 | 2054,52 | 2049,22 | 2038,56 | 2036,19 | 2035,52 | 2036,9 | 2030,74 |

хотя они остаются положительными. Т.е. количество людей на Земле продолжает увеличиваться, хотя и меньшими темпами.

Таким образом, если за 1900 лет с начала новой эры количество людей выросло примерно в 5,8 раз, то за последующие 117 лет оно увеличилось в 4,6 раза. Т.е. за указанные периоды темпы роста возросли примерно в 13 раз.

Ситуация приобретает взрывной характер. Аналогия с взрывом ещё больше усиливается, если рассмотреть математические модели динамики общей численности населения в мире.

Существующие математические модели и их критический анализ

Наиболее известной математической моделью, описывающей динамику численности N населения в мире, является модель гиперболического закона эволюции [4–6], полученная Мором, Форстером и Эмиотом на основе обработки известных им статистических данных до 1960 г.:

$$N = C / (T_1 - t), \quad (1)$$

где t — время в годах, отсчитываемое от начала новой эры (т.е. привычный нам номер года);

C — константа, величина которой зависит от того, в каких единицах измеряется N : если — в млрд. человек, то C оценивалась авторами модели в 200 млрд. человек [5,6];

T_1 — другая константа, имеющая размерность «год» и равная 2026,8685 лет.

Эта гиперболическая математическая модель (будем её обозначать как «Модель 1»), в которой присутствуют только 2 постоянные C и T_1 , является очень простой,

но при этом удивительно точной для описания динамики численности населения на протяжении не только веков, но и тысячелетий.

Если ограничиться только новой эрой, то можно определить величины C и T_1 из условия минимизации суммы квадратов *относительных* значений рассогласований между модельными и фактическими значениями численности населения.

Эти данные представлены в табл. 2 для различных значений начала статистического ряда.

Например, если год t_0 начала статистического ряда данных равен 1500, то это означает, что C и T_1 были определены за период 1500–1960 гг.

Из табл. 2 видно, что среднеквадратические относительные величины рассогласования составляют несколько процентов. И только, если начало статистики выбрать в нулевом году (начало новой эры), то получается около 14%.

Кроме этого, можно считать, что полученные указанным способом величины C и T_1 близки к тем, которые предложили авторы Модели 1.

Временная зависимость $N(t)$ для интервала 1500–2100 гг. представлена на рис. 4. При этом для наглядности в период 1950–2017 гг. маркеры, соответствующие реальным значениям численности населения, обозначены не для каждого года, а только для тех, номера которых делятся нацело на 5: 1950, 1955, 1960, 1965 и т.д. Это сделано для того, чтобы на рисунке маркеры не слились друг с другом. Аналогично — для других подобных рисунков, соответствующих другим моделям.

Теперь начинается самое интересное.

Дело в том, что Модель 1 имеет особую точку $T_1 = 2026,8685$, которая, по оценкам авторов модели, соот-

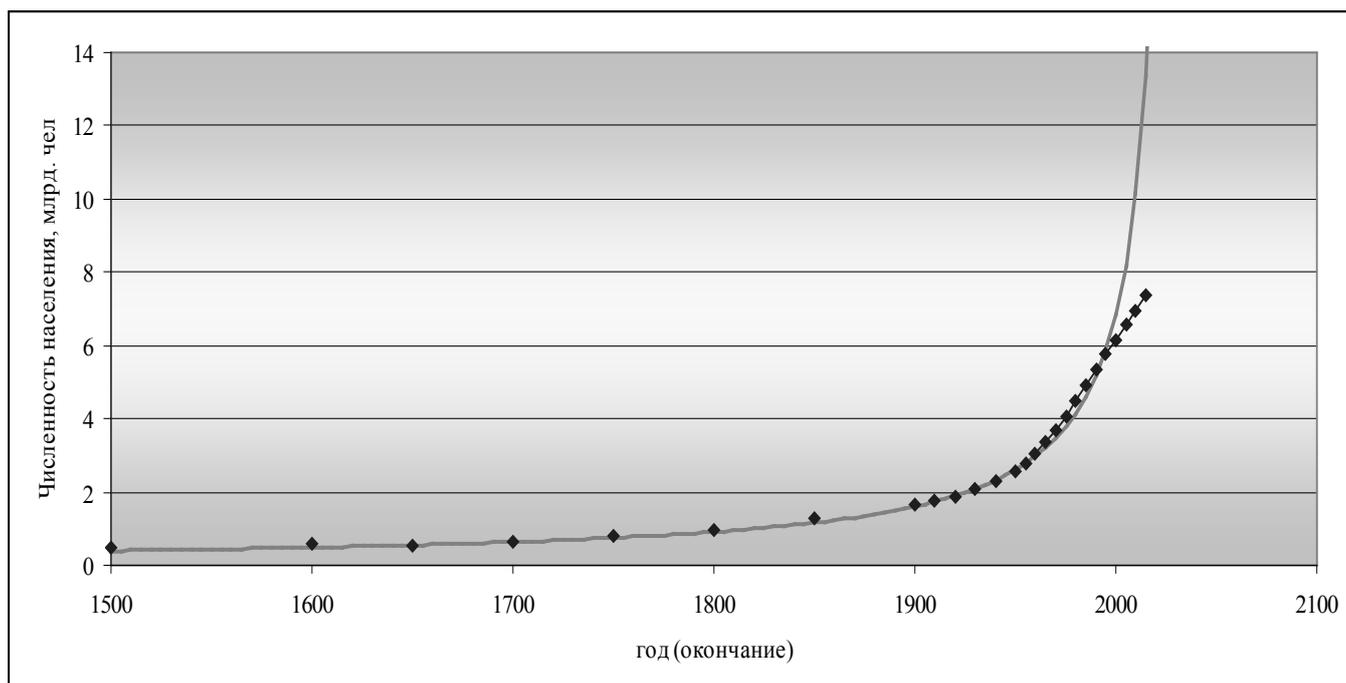


Рис. 4. Динамика численности населения на Земле (модель 1)

ветствует 13 ноября 2026 г. Согласно формуле (1), в этот день численность населения на Земле должна стать бесконечной.

Данные табл. 2 этой особенности принципиально не изменяют: если ориентироваться на цифры с 1900 г. (правый столбец табл. 4), то вместо 13 ноября 2026 г. получается 27 сентября 2030 г.

Напрашивается аналогия с вышедшем из-под контроля ядерным реактором, который скоро должен пойти в разнос. Поэтому наличие особой точки является самым серьезным недостатком Модели 1.

С.П. Капица считал, что существенным фактором, который не был учтен в Модели 1, являются времена жизни и наступления репродуктивной способности человека. Эти два фактора он смоделировал при помощи одного параметра τ следующим образом.

Сначала записал (1) в дифференциальной форме:

$$dN/dt = C/(T_1 - t)^2 \tag{2}$$

А затем в знаменателе заменил $(T_1 - t)^2$ на

$$(T_2 - t)^2 + \tau^2$$

Получилось дифференциальное уравнение

$$dN/dt = C/((T_2 - t)^2 + \tau^2), \tag{3}$$

решая которое при условии:

$$(T_2 - T)/\tau \rightarrow \infty \text{ (т.е. в далёком прошлом) } N \rightarrow 0,$$

можно получить простое аналитическое выражении для $N(t)$:

$$N = (C/\tau) \arcsctg\{(T_2 - T)/\tau\} \tag{4}$$

В (4) константы C , T_2 и τ должны определяться также из условия минимизации суммы квадратов относительных рассогласований между модельными и реальными значениями. Для этого приходится решать численным методом задачу оптимизации функции 3-х переменных. Впрочем, для любителей математики можно специально отметить: эту задачу можно свести к минимизации функции 2-х переменных, что несколько упрощает процедуру решения и повышает точность.

С.П. Капица предложил следующие значения параметров своей модели, которую далее будем называться «Модель 2» (N измеряется в млрд. человек):

$$C = 186 \text{ млрд. чел.}\cdot\text{лет}; T_2 = 2007; \tau = 42 \text{ года.}$$

В более поздней своей работе [6] он уточнил этот набор параметров:

Таблица 3. Модель 2 (до 2000 г.)

| Параметр | Год t_0 начала данных | | | | | | | | |
|--|-------------------------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|---------|------|
| | 0 | 500 | 1000 | 1500 | 1600 | 1700 | 1800 | 1900 | 1900 |
| Среднее относительное рассогласование $\Delta_0, \%$ | 11,758 | 8,395 | 7,67 | 4,432 | 3,944 | 3,594 | 3,448 | 2,411 | |
| $C,$ млрд. чел.×лет | 258,332 | 248,476 | 238,476 | 215,266 | 208,08 | 200,32 | 189,94 | 161,676 | |
| $T_1,$ годы | 2041,07 | 2038,63 | 2032,38 | 2026,52 | 2023,11 | 2019,5 | 2014,8 | 2002,67 | |
| $\tau,$ годы | 0 | 0 | 0 | 23,86 | 27,694 | 30,871 | 33,913 | 38,125 | |
| $N_{max},$ млрд. чел. | - | - | - | 28,344 | 23,605 | 20,386 | 17,6 | 13,322 | |

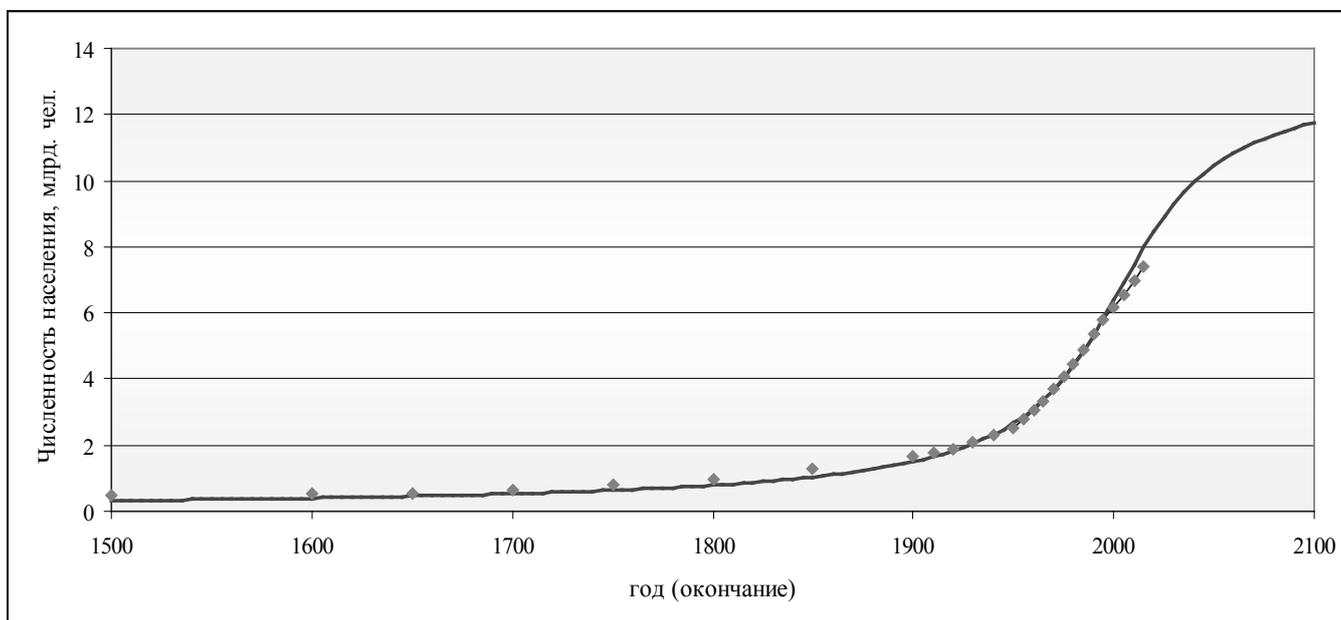


Рис. 5. Динамика численности населения на Земле (модель 2)

$C = 172$ млрд. чел.×лет; $T_2 = 2000$; $\tau = 45$ года.

Если с указанным в табл. 1 набором данных проделать операцию, как для Модели 1, то получится таблица 3.

Эти цифры близки к оценкам С.П. Капицы. Рассогласования Модели 2 с имеющимися фактическими данными также весьма малы.

Данные по динамике численности населения, рассчитанной по Модели 2, представлены на рис. 5.

Модель 2, которая при малых t переходит в Модель 1, по сравнению с ней имеет 2 существенных достоинства.

Во-первых, в ней отсутствует критическая точка, что соответствует реальности.

Во-вторых, из Модели 2 следует существование предела N_{max} , к которой будет асимптотически стремиться численность человечества:

$$N_{max} = \pi \times C / \tau$$

По оценкам [6] автора Модели 2, этот предел равен 12 млрд. человек, по данным табл. 3 – 13,322 млрд. человек.

Для указанного изменения характера роста численности населения придумали специальное словосочета-

ние — *глобальный демографический переход*. Что-то вроде фазового перехода 2-го рода в физике.

Основной недостаток Модели 2 заключается в неясности физического смысла параметра τ : если он определяет среднее время жизни, то 42–45 лет — мало, а если темп смены поколений — то много; для этого больше подходит цифра 15–25 лет.

Но главное даже не в этом. Если τ рассматривать, как некую задержку по времени, то логично записать дифференциальное уравнение динамики численности населения не в виде (3), а в виде

$$dN/dt = C/(T_2 + \tau - t)^2,$$

из которого достаточно очевидно получается (1), в котором $T_1 = T_2 + \tau$, и критическая точка никуда не исчезает. Более того, она остаётся на прежнем месте. Поэтому проблема устранения сингулярности не решается.

Параметр τ можно рассматривать, как время задержки только при $t \approx T_2$. Действительно, т.к.

$$(T_2 + \tau - t)^2 = (T_2 - t)^2 + 2 \times (T_2 - t) \times \tau + \tau^2,$$

то $(T_2 + \tau - t)^2 \approx (T_2 - t)^2 + \tau^2$ только когда мало отличается от T_2 .

Во всех остальных случаях τ не может считаться временной задержкой. В лучшем случае — это некоторый моделирующий параметр, имеющий размерность времени, но не имеющий чёткого физического смысла.

И поэтому логически зависает, превращаясь в математическую абстракцию, важное для Модели 2 понятие глобального демографического перехода — не ясны его движущие факторы.

Как видно из выражений (1–4) для рассмотренных Моделей 1,2, они предполагают, что рост численности N населения Земли на протяжении тысячелетий зависит только от самой численности населения N и не связан с другими внешними факторами: параметрами окружающей среды, технологиями, ресурсными ограничениями и т.д. Это достаточно смелое предположение получило название «*демографический императив*».

Название, конечно, красивое, но мало, что объясняет; поэтому оно недостаточно конструктивно.

В работе [4] рассмотрены другие возможные модели роста населения Земли. Основная задача этих подходов, многие из которых весьма остроумны, заключается в по-

пытках объяснения феномена последних десятилетий — замедления темпов роста численности населения после 1967–1968 гг.

Действительно, всё довольно странно: больших войн и эпидемий не было, большие астероиды на Землю не падали, а темпы роста вдруг стали падать. С точки зрения демографического императива это — необъяснимо, и поэтому неприятно для его последователей.

Из рассматриваемых в [4] подходов можно выделить модели М. Кремера, А.В. Подлазова, модель самих авторов работы [4]. Любопытны также попытки связать снижение рождаемости с уровнем грамотности населения. Правда, где здесь причина, а где следствие — тоже не очень понятно: если в семье 10 негритят или семеро по лавкам, то это как-то не стимулирует получение хорошего образования.

Для объяснения снижения темпов роста большинство авторов предполагают создание вспомогательных моделей 2-го и 3-го уровней. По их мнению, это поможет решить исходную задачу.

А по нашему мнению, эти исследователи попадают в логическую ловушку. Дело в том, что математические модели более низких системных уровней для своей калибровки требуют наличия больших объёмов исходных данных. А их как раз и недостаточно. Это известная эконометрическая дилемма — выбор рациональной сложности математической модели, чтобы она соответствовала располагаемым фактическим данным: часто приходится упрощать математическую модель, поскольку для более адекватных и более сложных моделей недостаточно количества и качества исходных данных.

Поэтому ниже сделана попытка таких модификаций первичных Моделей 1 и 2 для того, чтобы учесть новые факторы, но при этом не сильно усложнить сами модели. С тем, чтобы они были совместимы с имеющимися исходными данными.

Математические модели на основе модификаций исходного уравнения динамики численности населения

Зададимся простым вопросом: почему Модель 1 правильно описывала динамику численности населения на протяжении тысячелетий, а потом вдруг в последние 50 лет стала давать сбои? Почему такое произошло, что изменилось за последние полвека?

Попробуем ответить на первую часть вопроса: почему Модель 1 очень хорошо описывала динамику общего количества людей в предыдущие годы?

Получение формул, обеспечивающих малые ошибки интерполирования — дело нехитрое: например, студенты первых курсов знакомятся с интерполяционной формулой Лагранжа, которая вообще обнуляет величины всех рассогласований между фактическими значениями и величинами интерполяционного полинома. Правда для целей прогнозирования (т.е. для значений независимой переменной вне интервала интерполирования) такой полином применять нельзя — он для этого не годится из-за больших ошибок. Причём, чем выше степень полинома, тем больше ошибки прогнозирования.

Может быть, и здесь — то же самое: внутри интервала наблюдения ошибки малы, а при выходе за него — резко нарастают?

Нет, не похоже: в интерполяционном полиноме много коэффициентов, а в Модели 1 — только 2. С двумя степенями свободы малые рассогласования можно получить только, если аппроксимирующая функция соответствует основным закономерностям рассматриваемого процесса. Поэтому, следует признать, что Модель 1 объективно описывает динамику численности, по крайней мере, до 1960 г.

Теперь попробуем ответить на поставленный вопрос с позиций демографического императива, у которого имеются много приверженцев. В соответствии с этим подходом, причину следует искать только в одном — в численности N населения.

Она резко возросла за последние 50 лет. Иначе говоря, изменились закономерности, связывающие темпы роста dN/dt и его численности при $N > 3,5$ млрд. человек. Причём они модифицировались таким образом, что при малых N работает старая, проверенная на тысячелетиях схема, а в последние десятилетия из-за роста N она трансформировалась в другую, более общую. Которая при малых N имеет своим предельным случаем старую схему.

Теперь изложим вышесказанное на более конкретном языке математических формул. Возьмём за основу выражения (1) и (2) для определения N .

Легко видеть, что их можно записать не в виде дифференциального соотношения, а в виде дифференциального уравнения:

$$dN/dt = N^2/C \tag{5}$$

Обычно темп роста численности живых организмов пропорционален N , а не N^2 . Почему у людей всё не так?

А. В. Подлазов предлагает объяснение с точки зрения развития жизнесберегающих технологий. Причём, в этот

термин он вкладывает очень широкий смысл. Жизнесберегающие технологии — это технологии продления жизни и предотвращения смерти безотносительно к тому, каким образом это достигается: от производства продовольствия до религиозных норм морали.

Следующий этап — считается, что развитие и обновление жизнесберегающих технологий осуществляется посредством значимых социальных изобретений, количество которых пропорционально количеству N живущих людей: чем больше людей, тем больше среди них потенциальных изобретателей, тем больше изобретений. И результаты этих изобретений затем начинают тиражироваться и использоваться всем человечеством.

Другими словами, в этом предположении выражение (5) может быть переписано в виде:

$$dN/dt = (N/\alpha) \times (N/\beta) = (N/\alpha) \times (N\alpha/C), \tag{6}$$

где для обеспечения соответствия (5) и (6) следует положить $\alpha\beta = C$.

В (6) первый сомножитель определяет динамику количества живущих на Земле людей, как биологического вида, а второй — как динамику совершенствования жизнесберегающих технологий.

Но понятно, что жизнесберегающие технологии, скорее всего, не могут развиваться бесконечно с ростом N , как это записано в (6) Для их эффективности W существуют физические и биологические пределы.

Обычно динамика параметра W определяется из дифференциального уравнения:

$$dW = (1 - W) \times \eta \times dN \tag{7}$$

Уравнение (7) указывает, что:

- ◆ предельная эффективность некоторых действий (в данном случае — жизнесберегающих технологий) равна 100% или в безразмерном выражении — 1;
- ◆ в каждый момент времени изменение эффективности пропорционально изменению определяющего фактора, в данном случае — N ;
- ◆ кроме этого, в каждый момент времени изменение эффективности пропорционально потенциальным возможностям $(1 - W)$ по её дальнейшему изменению: чем меньше этот, пока нереализованный, остаток, тем труднее добиться изменения.

Почти очевидно, что уравнение (7) имеет решение

Среднеквадратическое относительное рассогласование
 Δ модельных и фактических значений по численности населения

$$\Delta(\alpha, C, \gamma) = \{j(t_k) - j(t_0) + 1\}^{-1} \times \sum_{j(t_0)}^{j(t_k)} \{N(\text{ML}[j(t), 1], \alpha, C, \gamma) / \text{ML}[j(t), 2] - 1\}^2 \quad (10)$$

$$W = 1 - \exp(-\eta \times N), \quad (8)$$

которое удовлетворяет также очевидному условию:
 при $N = 0$ также $W = 0$.

При малых N

$$W = 1 - \exp(-\eta \times N) \approx \eta \times N$$

Теперь становится понятным, как следует модифицировать (5) и (6), чтобы учесть изменение закономерности, определяющей темп роста численности населения: вместо (6) нужно записать

$$dN/dt = (N/\alpha) \times \{1 - \exp(-N \times \alpha / C)\} \quad (9)$$

Это дифференциальное уравнение при малых N переходит в уравнение (5). Но при больших N , когда экспонента проявляет свои нелинейные свойства, в решении (9) отсутствует сингулярная точка. При этом с увеличением t продолжается неограниченный рост N , но уже не по гиперболическому, а по экспоненциальному закону.

Это — очень важная методическая особенность (9).

В отличие от предыдущих уравнений, дифференциальное уравнение (9) не может быть решено аналитически. Для этого потребуются численные методы, например, метод Эйлера с малым шагом по времени. Величину шага выберем равной 1-му месяцу, т.е. 1/12 года.

Потребуется также задать начальное условие. Его естественно записать в виде:

$$N(t_0) = \gamma \times \text{ML}[j(t_0), 2],$$

где $j(t_0)$ — где номер строки в массиве ML , соответствующей году t_0 начала статистических данных по численности населения;

γ — корректирующий безразмерный параметр.

В результате численного решения (9) для заданного значения t_0 устанавливается следующая функциональная зависимость

$$N(t) = N(t, \alpha, C, \gamma)$$

Далее в интервале наблюдения определяется среднеквадратическое относительное рассогласование Δ модельных и фактических значений по численности населения (см. формулу выше).

Следующим этапом является определение такого набора параметров α_0, C_0, γ_0 , который минимизирует $\Delta(\alpha, C, \gamma)$, лучше всего соответствуя совокупности фактических данных по численности населения в мире в рассматриваемом временном периоде:

$$(\alpha_0, C_0, \gamma_0) = \text{Arg} \{ \Delta_0 = \min \Delta(\alpha, C, \gamma) \} \quad (11)$$

В этой оптимизационной задаче $\Delta(\alpha, C, \gamma)$ играет роль минимизируемой целевой функции.

Наконец, на последнем этапе для любого t рассчитываются значения $N(t) = N(t, \alpha_0, C_0, \gamma_0)$.

Посмотрим, как математическая модель на основе дифференциального уравнения (9), которую далее назовём «Модель 3», соответствует реальности, т.е. имеем исходным данным.

Результаты соответствующих расчётов представлены в табл. 4 по примерно такой же форме, как при иллюстрациях Модели 1 и Модели 2.

То, что полученные значения C_0 оказались очень близки к соответствующим значениям табл. 2 — не удивительно: Модель 1 и Модель 3 имеют одну основу.

Также понятно, почему Модель 3 приводит к несколько меньшим ошибкам среднеквадратического рассогласования — в ней не 2, а 3 свободных параметра. Поэтому её способность адаптироваться к набору исходных данных выше, чем у Модели 1, т.е. с точностью до погрешностей численного интегрирования дифференциального уравнения средняя величина рассогласования должна быть ниже.

Но главное достоинство Модели 3 состоит в том, что в ней нет сингулярной точки, в которой $N \rightarrow \infty$.

Прежде, чем переходить к описанию следующих математических моделей, нужно сделать одно пояснение.

Таблица 4. Модель 3 (до 1960 г.)

| Параметр | Год t_0 начала данных | | | | | | | |
|--|-------------------------|---------|---------|--------|---------|--------|--------|--------|
| | 0 | 500 | 1000 | 1500 | 1600 | 1700 | 1800 | 1900 |
| Среднее относительное рассогласование $\Delta_0, \%$ | 14,289 | 9,601 | 9,483 | 3,955 | 3,059 | 2,243 | 2,13 | 1,499 |
| α_0 , год | 2,745 | 1,635 | 0,9 | 0,975 | 2,1 | 3,0625 | 2,6125 | 3,35 |
| β_0 , млрд. чел. | 103,962 | 163,303 | 283,417 | 234,77 | 106,12 | 71,938 | 85,67 | 61,567 |
| γ_0 | 0,48625 | 0,8601 | 0,9184 | 0,8826 | 0,91425 | 1,0358 | 0,9848 | 0,97 |
| C_0 , млрд. чел.-лет | 285,375 | 267 | 255,08 | 228,9 | 222,85 | 220,31 | 223,81 | 206,25 |

Оптимизационная задача (11) представляет собой не очень хорошо определённую задачу. Дело в том, что параметры γ_0 и C_0 устанавливаются довольно однозначно, а вот насчёт параметров α_0 и $\beta_0 = C_0/\alpha_0$ это сказать сложно: достаточно точно устанавливается лишь их произведение, т.е. C_0 . Поэтому, как это видно из табл. 4, оптимальные значения α_0 и β_0 сильно волатильны. И поэтому нужно отдельно рассмотреть вопрос о реальных значениях какого-либо одного из этих параметров, например, параметра α_0 .

По своему физическому смыслу α_0 представляет собой темп роста численности населения Земли в комфортных условиях, когда

$$W = 1 - \exp(-\eta \times N) = 1,$$

т.е. когда жизнеспасающие технологии отработаны по максимуму, по крайней мере, на обозримый период до 2100 г.

Для определённости положим, что это соответствует средней продолжительности жизни людей 80 лет и тому, что они могут видеть не только своих внуков, но правнуков.

Кроме этого, проблем жильём, детскими садами, школами, пенсионным обеспечением и т.д. не существует. Доходы семьи также вполне достаточны. Поэтому каждая семья может завести и воспитывать столько детей, сколько ей будет не в тягость для своей комфортной жизни.

Но понятие «комфортная жизнь» у каждого своё.

Пусть родители считают, что им достаточно k детей, а оставшееся от их воспитания личное время должно пойти на работу, отдых, самосовершенствование. Пусть такого же мнения придерживаются их дети и внуки. Тогда степень участия родителей 1-го поколения в росте

численности населения может быть оценена следующим образом:

$$k + k^2/2 + k^3/4 = k \times \{1 + (k/2) + (k/2)^2\}$$

Деление на 2 и на 4 производится потому, что в рождении потомства опосредованно принимают участие родители из других аналогичных семей.

После того, как родители 1-го поколения после 80 лет жизни умрут, количество людей, рождённых при их участии, составит

$$k \times \{1 + (k/2) + (k/2)^2\} - 2$$

или в расчёте на 1-го родителя 1-го поколения:

$$(k/2) + (k/2)^2 + (k/2)^3 - 1$$

Тогда оценкой для минимального значения величины α будет

$$\alpha \approx 80 / \{(k/2) + (k/2)^2 + (k/2)^3 - 1\}$$

При $k = 3$ минимальное значение параметра α оценивается в 13,06 лет. Учитывая приближённый характер этой оценки, задачи минимизации Δ , типа (11) далее будут решаться при ограничении $\alpha \geq 13 \text{ год}^{-1}$ — так соответствие реальности будет точнее.

В табл. 5. представлены результаты такого решения.

Из сопоставления данных табл. 4 и 5 видно, что минимальное значение целевой функции изменилось очень незначительно, что было ожидаемо.

На рис. 6 представлен график временной зависимости $N(t)$ для случая, когда статистический ряд начинается с 1500 г., т.е. при $t_0 = 1500$.

Таблица. 5. Модель 3 (до 1960 г.; $\alpha \geq 13$ год⁻¹)

| Параметр | Год t_0 начала данных | | | | | | | |
|--|-------------------------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 500 | 1000 | 1500 | 1600 | 1700 | 1800 | 1900 |
| Среднее относительное рассогласование, % | 14,589 | 9,988 | 9,794 | 4,159 | 3,173 | 2,328 | 2,282 | 1,565 |
| α_0 , год | 14,5 | 13,9 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| β_0 , млрд. чел. | 19,155 | 18,808 | 19,132 | 17,052 | 16,574 | 16,352 | 16,487 | 15,006 |
| γ_0 | 0,478 | 0,8525 | 0,9103 | 0,8773 | 0,9088 | 1,03 | 0,9808 | 0,9684 |
| C_0 , млрд. чел.-лет | 277,75 | 261,438 | 248,713 | 221,675 | 215,46 | 212,58 | 214,33 | 195,08 |

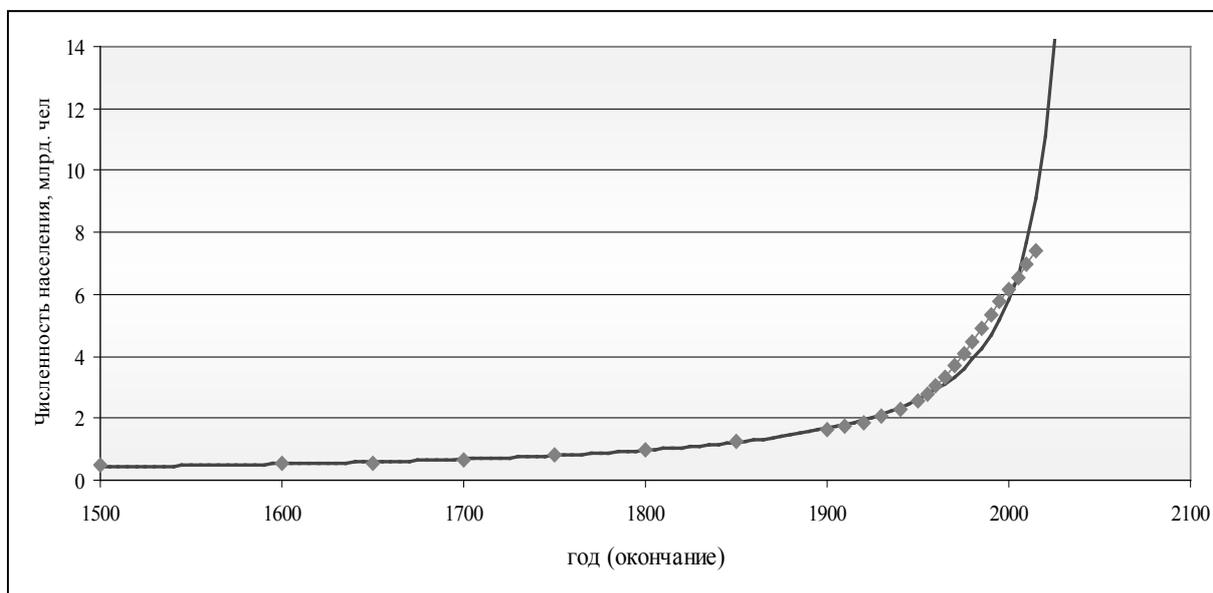


Рис. 6. Динамика численности населения на Земле (модель 3)

В целом этот график напоминает рис. 4, но он не имеет особой точки, в которой $N(t)$ обращается в бесконечность.

Хотя и не указывает на снижение темпов роста при $t > 1960$ г. Поэтому Модель 3 нуждается в доработке.

Например, в правую часть (9) можно ввести запаздывание τ — у людей рождаются дети, и начинается изобретение жизнесберегающих технологий не с момента рождения, а начиная с некоторого возраста τ .

Назовём такую модификацию Модель 4.

Уравнение динамики численности населения в Модели 4 будет выглядеть следующим образом:

$$dN(t)/dt = \{N(t-\tau)/\alpha\} \times \{1 - \exp(-N(t-\tau) \times \alpha / C)\} \quad (12)$$

Решения такого уравнения усложняется, поскольку нужно учитывать не текущие, а запаздывающие значения N . Для этого в вычислительной программе формируются дополнительный массив, в который записывается история процесса.

Теперь целевая функция $\Delta(\alpha, C, \gamma, \tau)$ в задаче минимизации зависит от 4-х переменных.

$$(\alpha_0, C_0, \gamma_0, \tau_0) = \text{Arg} \{ \Delta_0 = \min \Delta(\alpha, C, \gamma, \tau) \} \quad (13)$$

при ограничении

$$\alpha \geq 13$$

Таблица 6. Модель 4 (от 1900 г.; $\alpha \geq 13$ год-1)

| Параметр | Год t_k окончания данных | | |
|--|----------------------------|--------|--------|
| | 1967 | 2000 | 2017 |
| Среднее относительное рассогласование Δ_0 , % | 2,111 | 2,895 | 3,997 |
| α_0 , год | 13 | 41,13 | 57,65 |
| β_0 , млрд. чел. | 13,845 | 3,0582 | 1,53 |
| γ_0 | 0,9515 | 0,9062 | 0,8796 |
| C_0 , млрд. чел.×лет | 179,99 | 125,78 | 88,2 |
| t_0 , годы | 0 | 0 | 0 |

Решая оптимизационную задачу (13) при $t_0 = 1900$ и различных временах t_k окончания статистического ряда, получим значения, представленные в табл. 6.

Значения времени t_0 оказываются равными нулю, что делает нецелесообразным применение более сложной Модели 4. А величины α_0 и C_0 существенно разнятся при различных значениях t_k . В действительности такого быть не должно, эти величины должны быть примерно одинаковыми для разных t_k .

Поэтому объяснить снижение темпов роста численности населения после 1967–1968 г.г. только учётом запаздывания τ не получается. Опять нужно рассматривать какой-то механизм изменения тенденции роста.

Фактические данные по ограничению численности населения в мире

Дальнейший анализ будет основываться на предположении, что основным движущим фактором снижения темпов роста населения в период 1967–2017 гг. являются меры, предпринимаемые рядом стран по ограничению скорости роста его численности [7,8].

Такие меры в разных странах имеют свои национальные особенности.

В Индии обсуждение вопросов роста населения и демографической политики началось ещё до завоевания страной независимости, когда в 1938 г. Переходное правительство образовало при Национальном плановом комитете подкомитет по населению.

С 1952 г. государство начало реализацию политики снижения рождаемости. Проводилась массовая, финансируемая государством, стерилизация женщин и избирательные аборты. Правительство Индиры Ганди ввело денежные поощрения стерилизации, а затем приняло решение о насильственной стерилизации двухдетных

мужчин. Кампания проводилась на протяжении нескольких лет в условиях особого положения.

Начиная с конца 1960-х годов, одна развивающаяся страна за другой принимали программы планирования семьи, адаптируя чужой опыт к своим национальным условиям.

В Китае в период 1978–2016 гг. существовала программа «Одна семья — один ребёнок», которая, согласно официальной статистике, предотвратила более 400 млн. рождений. Правда, после 2016 г. эта программа была отменена, и введено разрешение иметь 2-х детей, что по существу также является ограничением.

Политика одного ребёнка включала меры контроля, поощрения и наказания. Если брачная пара уже имела 2-х детей, женщина (или, реже, мужчина) должна была подвергнуться стерилизации. Любая беременность без предварительного официального разрешения должна была прекращаться абортom. Принудительные кампании достигли кульминации в 1983 г., когда было проведено 21 млн. стерилизаций, 14 млн. абортов.

Превышение разрешенного числа детей влекло карательные санкции, включая крупные штрафы, вычеты из зарплаты или лишение работы, конфискацию или разрушение семейного дома или имущества, политические преследования.

Поощрительный пакет включал регулярные пособия на единственного ребёнка, приоритетный доступ к услугам здравоохранения и образования, преимущества родителям в получении хорошей работы.

В итоге в городах суммарная рождаемость снизилась до 1,4 ребёнка на женщину. С 1984 г. правительство начало видоизменять политику одного ребёнка в сельской местности. В 18 провинциях женщинам было разрешено рожать 2-го ребенка, если первой родилась девоч-

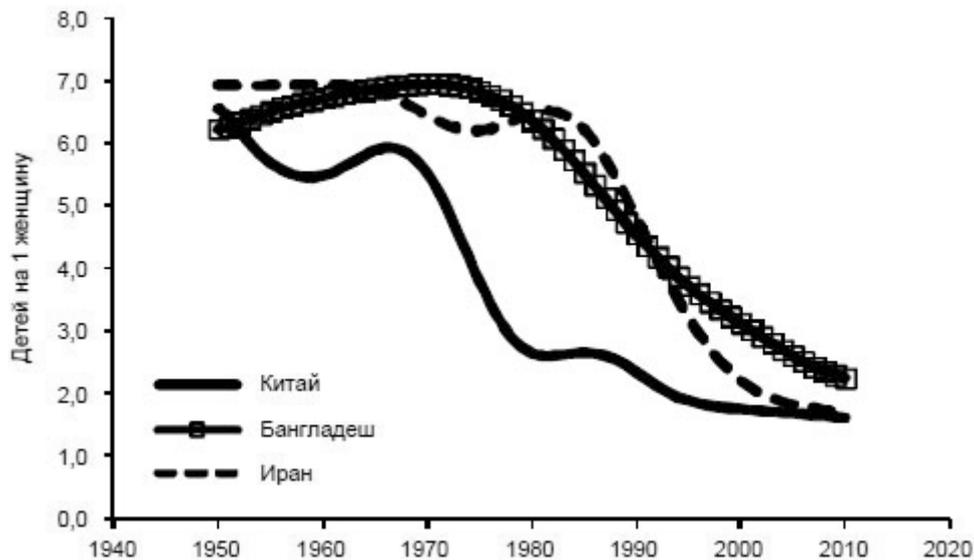


Рис. 7. Коэффициент суммарной рождаемости в Китае, Бангладеш и Иране в 1950–2010 гг. ([8])

ка. В 5 провинциях всем сельским супружеским парам было разрешено иметь 2-х детей. В других 5 провинциях с преобладанием этнических меньшинств был установлен 3-детный предел. В 2-х провинциях и 4-х районах со статусом провинции оставлена 1-детная норма. Точное значение коэффициента суммарной рождаемости в сельской местности неизвестно, но по оценкам он составляет 2 ребёнка на женщину.

Пример успешной программы планирования семьи в экстремально плохих экономических условиях реализован в Бангладеш. В 1970-х годах в сельском районе Матлаб был начат эксперимент по комплексному предоставлению услуг планирования семьи и репродуктивного здоровья. Женщинам предлагался широкий выбор методов, консультации высококвалифицированных специалистов и современная акушерская и гинекологическая помощь. В зоне действия эксперимента использование контрацепции резко возросло, а рождаемость снизилась, чего не наблюдалось в контрольной зоне. Правительство страны приняло решение распространить матлабский эксперимент на всю страну и добилось немалых успехов.

В Иране провозглашённая в 1979 г. Исламская Республика сначала свернула начатые при монархическом строе программы планирования семьи на том основании, что исламу и стране нужно большое население. Минимальный возраст вступления в брак был снижен до 9 лет для мальчиков и 12 лет для девочек. Рождаемость выросла на одного ребенка на женщину.

После смерти аятоллы Хомейни в 1989 г. правительство Хаменеи-Рафсаджани круто изменило курс на огра-

ничения рождаемости, осознав, что стремительный рост населения быстро исчерпает возможности обеспечения его продовольствием, образованием, жильём и рабочими местами. Было провозглашено, что ислам благословляет только 2-детные семьи. Министерство здравоохранения развернуло общенациональную программу планирования семьи, предлагавшую широкий выбор контрацептивных методов. В 1993 г. парламент принял законы, лишившие третьих детей и детей более высоких порядков рождения продовольственных талонов и социальных субсидий, а их матерей — декретных отпусков. Прохождение учебного курса планирования семьи стало условием заключения брака. В результате уровень использования современной контрацепции поднялся с 26% в 1975 г. до 59% в 2002 г., а суммарная рождаемость снизилась с 6,2–6,5 ребёнка на женщину в начале 1970-х годов до 2 детей на женщину в 2002 г. (рис. 7).

В настоящее время в Китае, Индии, Бангладеш и Иране проживает более 40% населения Земли. Поэтому меры, принимаемые этими странами, являются очень значимыми.

К 2009 г. только 9 из 136 развивающихся государств не оказывали прямой государственной поддержки программам планирования семьи.

В целом эти программы зарекомендовали себя как эффективный инструмент гашения демографического взрыва и средство улучшения здоровья женщин, младенцев и маленьких детей. По оценкам, реализация программ в 1985–2010 гг. обеспечили снижение рожда-

емости в развивающихся странах с 6 детей на женщину в 1960–1965 гг. до 2–3-х детей, т.е. в 2,5–3 раза.

Формализация процесса ограничения численности населения в мире

Как формализовать процесс ограничения численности населения в мире и учесть его в математических моделях динамики?

Можно по общей схеме (8) ввести показатель W^* эффективности проводимых мероприятий по снижению скорости роста численности населения в мире с 1967 г.:

$$W^* = 1 - \exp\{-\omega \times (t - 1967)\} \quad (14)$$

Обоснование вида соотношения (14) — такое же, как для соотношения (8). Здесь фактор, определяющий эффективность — время t . В качестве точки отсчёта принят 1967 г., как год, предшествующий году максимума темпов увеличения численности. Поскольку понятно, что должна быть небольшая задержка, чтобы проявилась эффективность проводимых мероприятий.

Тогда скорость V роста численности населения в условиях новых ограничений будет иметь вид

$$V = V_0 \times (1 - W^*) = V_0 \times \exp\{-\omega \times (t - 1967)\},$$

где ω — темп снижения скорости роста, величина которого далее будет установлена.

Таким образом, основное уравнение динамики численности населения записывается в виде:

$$dN(t)/dt = U(t) \times \{N(t-\tau)/a\} \times \{1 - \exp(-N(t-\tau) \times \alpha/C)\}, \quad (15)$$

где

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq 1967 \\ \exp\{-\omega \times (t - 1967)\} & \text{при } t > 1967 \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение (15) должно интегрироваться при начальном условии

$$N(t_0) = \gamma \times ML[j(t_0), 2],$$

где t_0 — год начала статистического ряда.

Назовём эту расчётную схему «Модель 5».

Полагая $t_0 = 1950$, можно получить зависимость численности населения в виде $N(t) = N(t, \alpha, C, \gamma, \tau, \omega)$.

Для определения совокупности параметров $\alpha, C, \gamma, \tau, \omega$, наилучшим образом соответствующих статистическому ряду при $t = t_0 - 2017$, опять составляем функцию Δ , определяющую среднеквадратическое относительное рассогласование между модельными и реальными значениями численности населения в обозначенном интервале.

Запишем это подробно:

$$\Delta(\alpha, C, \gamma, \tau, \omega) = \{j(t_k) - j(t_0) + 1\}^{-1} \times \sum_{j(t_0)}^{j(t_k)} \{N(ML[j(t), 1])\},$$

$$\alpha, C, \gamma, \tau, \omega / ML[j(t), 2] - 1 \}^2 \quad (16)$$

Целевая функция $\Delta(\alpha, C, \gamma, \tau, \omega)$ — функция 5 переменных.

Набор параметров $\alpha_0, C_0, \gamma_0, \tau_0, \omega_0$ наилучшим образом соответствующих статистическому ряду, определяется в результате численного решения оптимизационной задачи

$$(\alpha_0, C_0, \gamma_0, \tau_0, \omega_0) = \text{Arg} \{ \Delta_0 = \min \Delta(\alpha, C, \gamma, \tau, \omega) \} \quad (17)$$

при ограничении $\alpha \geq 13$

В результате получаем следующие значения: $\alpha_0 = 20,5278$ год, $C_0 = 113,287$ млрд. чел.хлет, $\gamma_0 = 1,001$, $\tau_0 = 2,8468$ лет, $\omega_0 = 0,025$ год⁻¹.

При этом для 68 опорных точек минимальное значение Δ_0 составляет только 0,328%. Т.е. Модель 5 верно отражает реальность, по крайней мере, до 2017 г. Количество параметров Модели 5, равное 5, относительно невелико, что усиливает предположение об её адекватности.

Результаты моделирования графически представлены на рис. 8, 9 из которых видно уже упомянутое хорошее совпадение реальных и расчётных данных. И которые показывают, что существует предел роста численности населения на Земле — 11–12 млрд. человек.

Последнее требует уточнения: полученный результат, наилучшим образом соответствующий современным статистически данным по количеству живущих на Земле людей.

Кроме этого, он позволяет в глобальном масштабе оценить эффективность мер по ограничению рождаемости, предпринятыми странами к настоящему времени. Она равна

$$1 - \exp\{-\omega_0 \times (2017 - 1967)\} = 1 - e^{-1,25}$$

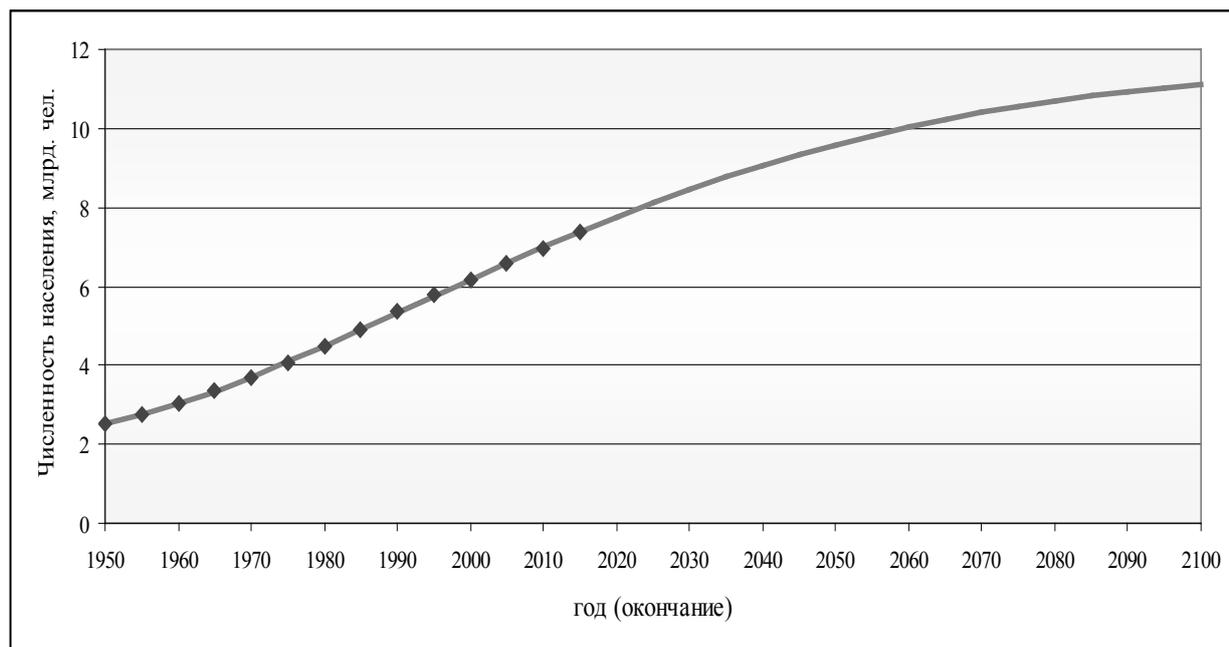


Рис. 8. Динамика численности населения на Земле (модель 5)

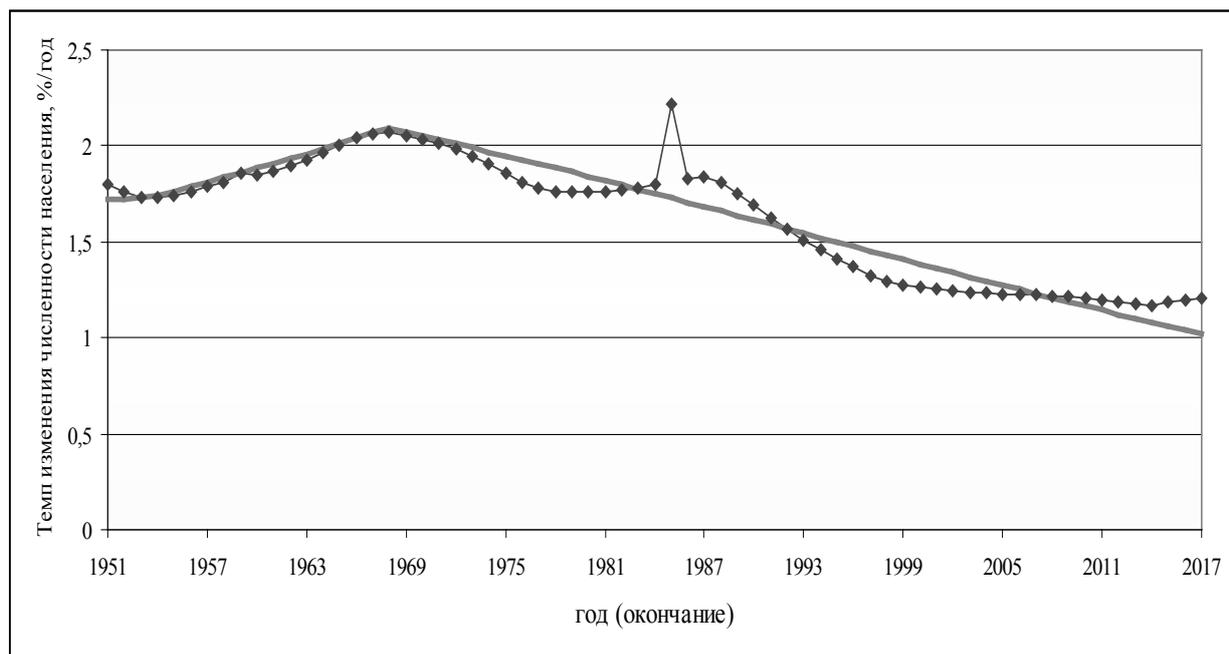


Рис. 9. Темп роста численности населения Земли (модель 5)

Иначе говоря, ограничение рождаемости позволило снизить темп роста численности населения в $e^{1.25} = 3,49$ раз.

На всякий случай, для ясности: указанная величина определяет снижение скорости роста численности

не по отношению к 1967–1968 гг., а к той величине, которая была бы в 2017 г. при отсутствии ограничительных мер.

Это соответствует другим независимым оценкам эффективности реализации политики ограничения рождаемости.

Заключение

Проведённый анализ динамики численности населения Земли был основан на последовательности обобщений ранее разработанных математических моделей.

Результатом явилось формирование достаточно точной модели, адекватно отражающей существующую динамику.

Новая математическая модель позволяет учесть факторы, которые начали заметно проявлять себя в последние десятилетия.

Отличительная особенность предлагаемой модели состоит не в некоем аналитическом соотношении, а в алгоритме численного решения уравнения динамики численности населения Земли.

Установлено, что рост численности имеет предел около 12 млрд. человек, что соответствует оценкам С.П. Капицы.

Однако объяснение существования этого предела основано не на демографическом императиве, а на учёте и формализации более понятных, широко известных и эффективных мер по ограничению рождаемости, принимаемых многими странами в рамках реализации своей демографической и экономической политики при содействии международных организаций.

Поэтому в предлагаемой математической модели глобальный демографический переход связывается с конкретными мерами по ограничению рождаемости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Население Земли. URL: <https://countrymeters.info/ru/World> (дата обращения: 10.11.2018).
2. Население Земли. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Население_Земли (дата обращения: 10.11.2018).
3. История населения Земли. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/История_населения_Земли (дата обращения: 10.11.2018).
4. А. В. Коротаяев, А. С. Малков, Д. А. Халтурина, «Математическая модель роста населения Земли, экономики, технологии и образования», Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2005, 013, 39 с.
5. Капица С.П. «Рост населения Земли и его математическая модель» — М., «Наука и жизнь» № 3, 1998.
6. Капица С.П. «Модель роста населения Земли и предвиденное будущее цивилизации» — М., Институт физических проблем РАН, 2000.
7. Политика ограничения рождаемости. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Политика_ограничения_рождаемости.
8. Иванов С. В. «Снижение рождаемости в странах Юга» // Экономический журнал ВШЭ, № 11, 2011, с. 565–582 — М., Демоскоп Weekly № 587–588, 2011.