

# СУММАРНО-ДАЛЬНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ КОМПЛЕКСА РАДИОТЕХНИЧЕСКОГО КОНТРОЛЯ НА БАЗЕ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

## TOTAL-RANGE-MEASURING MODEL OF POSITIONING A RADIO-TECHNICAL CONTROL COMPLEX BASED ON UNMANNED AERIAL VEHICLES

V. Kopyltsov

*Summary.* The paper considers the problem of ensuring navigation of a radio-technical control complex based on unmanned aerial vehicles (UAVs) using a total-range-measuring local navigation system. A combined positioning algorithm has been developed that does not require synchronization of reference transceiver points. The metric of calculating the lower bound of Cramer-Rao is proposed as an assessment of the quality of this algorithm. It has been established that the accuracy of determining the coordinates of the UAV using the proposed local positioning model depends on the number and spatial arrangement of reference transceiver points, as well as on the accuracy of determining the moments of time of receiving navigation signals. Computer modeling of the proposed algorithm has been carried out, which confirmed the operability and required accuracy of the developed LNS.

*Keywords:* local navigation systems, asynchronous differential-range measurement method, radiotechnical control, determination of UAV coordinates.

**Копыльцов Владимир Юрьевич**

Заместитель генерального конструктора,  
начальник направления, ООО «Специальный  
технологический центр» г. Санкт-Петербург  
vkopyltcov@yandex.ru

*Аннотация.* В работе рассмотрена задача обеспечения навигации комплекса радиотехнического контроля на базе беспилотных летательных аппаратов (БЛА) при помощи суммарно-дальномерной локальной навигационной системы. Разработан комбинированный алгоритм позиционирования, не требующий синхронизации опорных приемопередающих пунктов. В качестве оценки качества данного алгоритма предложена метрика вычисления нижней границы Крамера-Рао. Установлено, что точность определения координат БЛА с использованием предложенной модели локального позиционирования зависит от числа и пространственного размещения опорных приемопередающих пунктов, а также от точности определения моментов времени получения навигационных сигналов. Проведено компьютерное моделирование предложенного алгоритма, который подтвердил работоспособность и необходимую точность разрабатываемой ЛНС.

*Ключевые слова:* локальные навигационные системы, асинхронный разностно-дальномерный метод, радиотехнический контроль, определение координат БЛА.

### Введение

С развитием современных технологий как в военной, так и в гражданской сфере все чаще находят применение беспилотные летательные аппараты БЛА для выполнения различных задач, в том числе радиотехнического контроля РТК [1]. В результате особую актуальность приобретает задача определения местоположения БЛА. В настоящее время определение координат объектов осуществляют на основе сигналов глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС), таких как ГЛОНАСС, GPS, Galileo и др. [2]. Они имеют развитую инфраструктуру, могут использоваться в любой точке Земли и доступны гражданским потребителям. Необходимо только приемное устройство, работающее по сигналам одной или нескольких ГНСС. Однако существует широкий спектр задач координатно-временного и навигационного обеспечения, в том числе и применительно к РТК, в которых определение координат места и времени по сигналам ГНСС невозможны или имеются высокие риски их срыва. В этих случаях актуальным яв-

ляется использование локальной навигационной системы (ЛНС), состоящей из сети опорных наземных пунктов (ОП), обеспечивающих надежное и с высокой точностью определение координат объектов навигации (ОН), в качестве которых могут выступать БЛА, самолеты и др. Известные ЛНС типа Locata [3, 4, 5] способны осуществлять навигацию летательных аппаратов, в целом очень похожую на навигацию (позиционирование) по радиосигналам ГНСС. В [6, 7] подробно представлены математические основы решения данной задачи дальномерным способом. В данном способе существует неоднозначность решения навигационной задачи, связанная с необходимостью решения квадратного уравнения, что требует дополнительных временных затрат для определения координат ОН. Кроме того, данный способ требует точной привязки шкал времени ОП, что затруднительно осуществить в связи с установкой достаточно дорогого высокостабильного эталона частоты. Поэтому целесообразнее использовать другие алгоритмы определения местоположения БЛА в условиях отсутствия или искажения сигналов ГНСС.

Целью настоящей работы является разработка асинхронного суммарно-дальномерного алгоритма позиционирования комплекса РТК на базе БЛА, обеспечивающий высокую защищенность к имитационным помехам и несанкционированному доступу в систему в условиях отсутствия или искажения сигналов ГНСС и воздействия преднамеренных помех.

### 1. Исходные данные и постановка задачи

Пусть  $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$  и  $\mathbf{x}_i = [x_i, y_i, z_i]^T$  — координаты БЛА и  $N$  опорных узлов (пунктов) соответственно,  $i = \overline{1, N}$ , один из которых является приемным центральным пунктом (ЦП). Без потери общности обозначим место приемного ОП  $R_x$  как  $\mathbf{x}_r$ , а координаты передающих ОП  $T_x$  —  $\mathbf{x}_t$ ,  $i=2, 3, \dots, N$ , рисунок 1.

Рисунок 2 иллюстрирует прохождение импульсов в ЛНС на основе суммарно-дальномерной модели позиционирования.

В момент времени  $t_{AT}$  опорный узел  $T_x$  излучает импульс, который принимается БЛА в момент времени  $t_{TR}$  и опорным узлом  $R_x$  в момент времени  $t_{ARD}$ . БЛА после приема импульса, сразу же его переизлучает. Ретранслированный (переизлученный) сигнал принимается узлом  $R_x$  в момент времени  $t_{ARR}$ . Таким образом, опорный узел  $R_x$  принимает два импульса, отстоящих друг от друга на величину задержки, один от передатчика  $T_x$ , другой от БЛА.

Расстояние, соответствующее данной задержки, можно вычислить по формуле

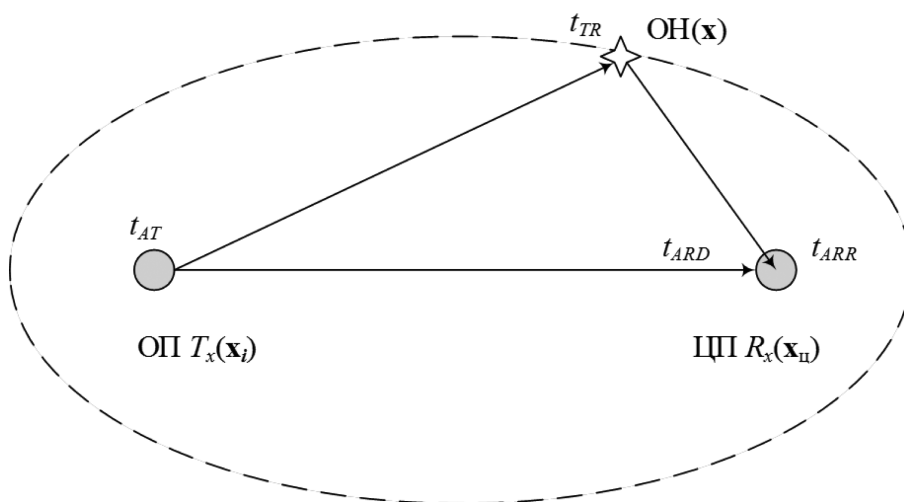


Рис. 1. Схематическое расположение двух опорных пунктов ( $T_x$  и  $R_x$ ) относительно объекта навигации

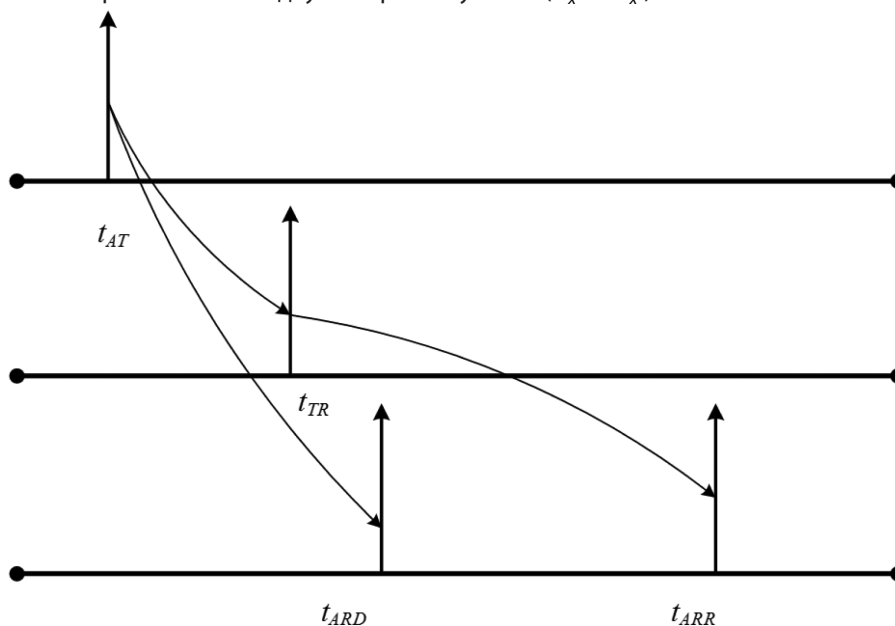


Рис. 2. Временные диаграммы сигналов, поясняющие асинхронный разностно-дальномерный способ определения координат

$$(t_{ARR} - t_{ARD}) \cdot c = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\| - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\| + n_i, i = 2, 3, \dots, N. \quad (1)$$

где  $n_i$  — ошибка измерения с нулевым средним.

Выражение (1) показывает суть суммарно-дальномерного способа, при котором измеряется задержка  $(t_{ARR} - t_{ARD})$  только в приемном узле  $R_x$ , и не требуется синхронизация между узлами данной системы.

Пример расположение узлов ЛНС приведен на рисунке 3.

Данная ЛНС состоит из четырех передатчиков  $T_x$  и одного приемника  $R_x$ . Сплошной линией на рисунке 3 показан прямой путь между передатчиком и приемником, а пунктирной — путь ретранслированного сигнала. Преобразуем уравнение (1) к равносильному виду

$$(t_{ARR} - t_{ARD}) \cdot c + \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\| + n_i, i = 2, 3, \dots, N \quad (2)$$

Из выражения (2) видно, что сумма расстояний от целевого объекта с координатами  $\mathbf{x}$  к двум узлам с фиксированными координатами  $\mathbf{x}_i$  и  $\mathbf{x}_1$  есть величина постоянная, равная сумме  $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\|$  и измеренному расстоянию  $d_{i1} = (t_{ARR} - t_{ARD}) \cdot c$ . Из этого следует, что БЛА лежит на эллипсе, а передатчик  $T_x$  и приемник  $R_x$  являются его фокусами, рисунок 1.

Примем, что опорный приемный пункт  $R_x$  является началом системы координат, т.е.  $\mathbf{x}_1 = [0, 0, 0]$ . Расстояние от приемного ОП до  $i$ -го передатчика и БЛА обозначим как  $R_i$  и  $R_s$  соответственно. Здесь  $R_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ ,

$i = 2, 3, \dots, M, R_s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \mathbf{x} = [x, y, z]$  — неизвестные координаты БЛА.

Расстояние между БЛА и  $i$ -м передатчиком представим как

$$D_i = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|, \quad (3)$$

а выражение (2) перепишем в виде

$$d_{i1} = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\| - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\| + n_i = D_i + R_s - R_i + n_i. \quad (4)$$

Из выражения (4) можно найти оценку

$$\hat{D}_i = d_{i1} - R_s + R_i. \quad (5)$$

Истинное значение  $D_i$ , согласно, теореме косинусов

$$D_i^2 = R_i^2 + R_s^2 - 2\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}. \quad (6)$$

Отсюда целевую функцию ошибки позиционирования можно выразить так

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\theta - \mathbf{b}, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & -(d_{21} + R_2) \\ x_3 & y_3 & z_3 & -(d_{31} + R_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & z_N & -(d_{N1} + R_N) \end{bmatrix},$$

$$\theta = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ R_s \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -d_{21}^2 - 2d_{21}R_2 \\ -d_{31}^2 - 2d_{31}R_3 \\ \vdots \\ -d_{N1}^2 - 2d_{N1}R_N \end{bmatrix}.$$

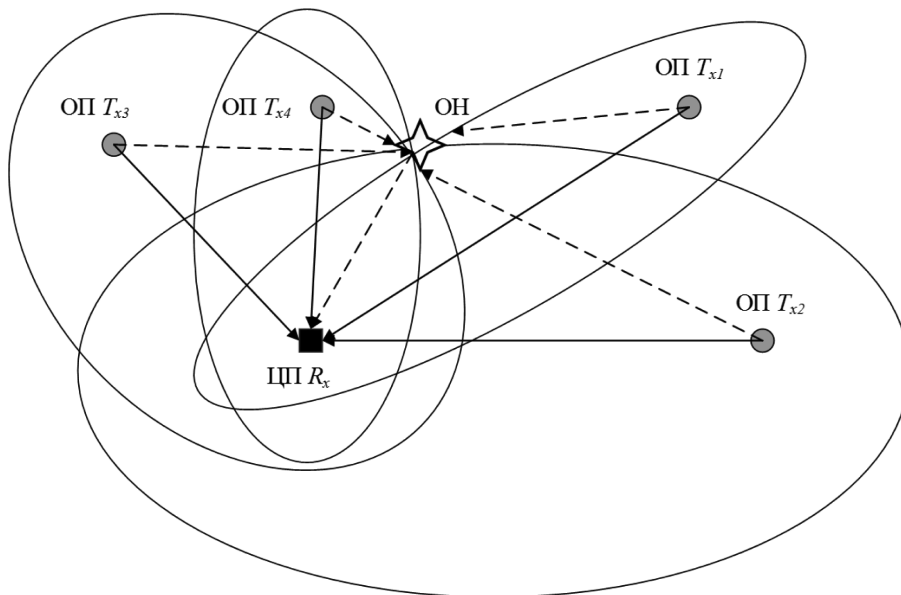


Рис. 3. Линии положения объекта при реализации асинхронного разностно-дальномерного способа определения координат

Оценка искомого параметра  $\theta$  может быть получена путем минимизации целевой функции (7)

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \\ \hat{R}_s \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}.$$

Таким образом, задача состоит в решении уравнения (7) при наличии начального приближения и  $(N-1)$  измерений разностей дальностей от  $(N-1)$  передатчиков.

## 2. Алгоритм определения координат объекта навигации на основе суммарно-дальномерных измерений

Предлагаемый алгоритм основан на комбинации двух методов, а именно рядов Тейлора [8] и полуопределенного программирования (SDP — Semidefinite programming) [9–11].

Обозначим измеряемую разность расстояний между прямым и ретранслированным сигналами в точке приема от  $i$ -го передающего ОП

$$r_i = d_i + n_i, i = 2, 3, \dots, N, \quad (8)$$

где  $n_i \sim N(0, \sigma_i^2)$  — белый шум с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_i^2$  вида

$$\sigma_i^2 = K_E (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|)^\beta + K_E (\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\|)^\beta, d_i — истинная  $i$ -я разность расстояний, равная  $d_i = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\| - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\|.$$$

Функцию правдоподобия для  $r_i$  выразим так

$$f(r_i | d_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(r_i - d_i)^2}{2\sigma_i^2}\right). \quad (9)$$

Представим  $N-1$  временных разностей в векторной форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{d} + \mathbf{n}. \quad (10)$$

Ошибки измерений вектора  $\mathbf{r}$  опишем как положительно определенную ковариационную матрицу размером  $(N-1) \times (N-1)$

$$\mathbf{N} = E[(\mathbf{n} - E[\mathbf{n}])(\mathbf{n} - E[\mathbf{n}])^T], \quad (11)$$

где  $E[\bullet]$  — математическое ожидание,  $T$  — знак транспонирования. Поскольку как отмечено выше измерения  $r_i$  — независимы, то ковариационную матрицу  $\mathbf{N}$  можно выразить так

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_3^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Если принять, что неизвестные координаты БЛА  $\mathbf{x}$  есть неслучайный вектор, то функцию правдоподобия для  $\mathbf{r}$  при условии  $\mathbf{x}$  можно представить в виде

$$p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{N}|} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} [\mathbf{r} - \mathbf{d}]^T \mathbf{N}^{-1} [\mathbf{r} - \mathbf{d}]\right\}, \quad (13)$$

где  $|\mathbf{N}|$  — обозначает детерминант матрицы  $\mathbf{N}$ , символ  $-1$  определяет инверсию.

Оценку неизвестного параметра  $\mathbf{x}$  можно найти из условия минимизации квадратичной формы

$$[\mathbf{r} - \mathbf{d}]^T \mathbf{N}^{-1} [\mathbf{r} - \mathbf{d}]. \quad (14)$$

Согласно выражениям (12) и (14) окончательный результат решения поставленной задачи с использованием метода максимального правдоподобия примет вид

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \sum_{i=2}^N \frac{(r_i - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\|)^2}{\sigma_i^2}. \quad (15)$$

Как можно видеть из формулы (15) целевая функция не является линейной и выпуклой. Отсюда следует, что неправильный выбор начального условия может привести к сходимости алгоритма в локальной точке поверхности целевой функции. С целью разрешения данного противоречия (обеспечения сходимости алгоритма в глобальной точке) можно воспользоваться методом оптимизации SDP [11].

Расширим уравнение (15) и представим его в виде

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2 + 2 \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|^2}{\sigma_i^2} - \frac{2 \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| (\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\| + r_i)}{\sigma_i^2} + \frac{2 \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\| (\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\| + r_i)}{\sigma_i^2} + \frac{r_i^2 + \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\|^2 + 2r_i \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\|}{\sigma_i^2}. \quad (16)$$

Если ввести следующие обозначения  $h_i = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$ ,  $\mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_M]^T$  и отбросить в (16) члены, не влияющие на решение оптимизационной задачи, то целевую функцию правдоподобия (при условии  $h_i = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$ ) можно выразить для решения ограниченной оптимизации так

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{x}, \mathbf{h}} \sum_{i=2}^M \frac{h_i^2 + 2 \cdot h_i \cdot h_1 + h_1^2}{\sigma_i^2} - \frac{2 \cdot h_i (\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\| + r_i) + 2 \cdot h_1 (\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\| + r_i)}{\sigma_i^2}. \quad (17)$$

Функция стоимости (17) остается нелинейной из за членов  $h_i^2$ ,  $h_i \cdot h_1$  и  $h_1^2$ . Путем введения параметра  $\mathbf{H} = \mathbf{h}\mathbf{h}^T$  и представления  $h_i h_1 = h_{i1}$  решение становится явным

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{x}, \mathbf{h}, \mathbf{R}} \sum_{i=2}^M \frac{h_{ii} + 2 \cdot h_{i1} + h_{11}}{\sigma_i^2} - \frac{2 \cdot h_i (\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\| + r_i) + 2 \cdot h_1 (\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\| + r_i)}{\sigma_i^2}, \quad (18)$$

где  $h_{ij} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i - 2\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}, i = 1, 2, \dots, M. \quad (19)$

Кроме того, используя новую переменную  $z = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$  решение (18) можно представить так

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{x}, \mathbf{h}, \mathbf{R}, z} \sum_{i=2}^M \frac{h_{ii} + 2 \cdot h_{i1} + h_{11}}{\sigma_i^2} - \frac{2 \cdot h_i (\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\| + r_i) + 2 \cdot h_1 (\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\| + r_i)}{\sigma_i^2}, \quad (20)$$

при условии  $\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{h} \\ \mathbf{h}^T & 1 \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}_{(m+1) \times (m+1)}, \begin{bmatrix} z & \mathbf{x}^T \\ \mathbf{x} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}_{(3 \times 3)},$

$h_{ii} = z + \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i - 2\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}.$

Таким образом, суть комбинированного подхода при решении (7) заключается в нахождении начального приближения (на основе описанного выше SDP уравнения) и его применения в методе Тейлора с целью достижения быстрой и устойчивой сходимости данного метода.

Приведем описание метода Тейлора применительно к суммарно-дальномерной модели. Обозначим  $f_i(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|$  и представим функцию ошибок в виде

$$e_i(\mathbf{x}) = r_i + \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\| - f_i(\mathbf{x}). \quad (21)$$

Пусть  $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0, z_0]^T$  начальные координаты объекта навигации,  $\Delta \mathbf{x} = [\delta x, \delta y, \delta z]^T$  — небольшое приращение (невязка)  $\mathbf{x}$ .

Применяя к (21) разложение в ряд Тейлора имеем

$$\mathbf{e} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{x}, \quad (22)$$

где  $\mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_M(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial f_M(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial f_M(\mathbf{x})}{\partial z} \end{bmatrix},$

$$\mathbf{b} \triangleq \begin{bmatrix} r_2 + \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| - f_2(\mathbf{x}_0) \\ r_3 + \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1\| - f_3(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ r_M + \|\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_1\| - f_M(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}.$$

Тогда оценка погрешности метода наименьших квадратов для 22 (2.29) равна

$$\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \quad (23)$$

а координаты объекта навигации

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}. \quad (24)$$

Процесс вычисления по формулам (23) и (24) продолжается пока величина приращение  $\Delta \mathbf{x}$  не станет достаточно малой.

### 3. Оценка предела точности позиционирования с использованием суммарно-дальномерной модели

Будем считать, что ошибки измерения  $n_i$  суммарных дальностей

$$r_i = d_i + n_i, i = 2, 3, \dots, N \quad (25)$$

независимы для каждого момента времени и распределены по нормальному закону ( $n_i \sim N(0, \sigma_i^2)$ ) с нулевым математическим ожиданием и дисперсией вида

$$\sigma_i^2 = K_E (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|)^\beta + K_E (\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\|)^\beta. \quad (26)$$

Потенциальная точность определения координат объекта наблюдения определяется информационной матрицей Фишера [12, 13]

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{d}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} \right], \quad (27)$$

где  $\mathbf{d}$  — вектор наблюдаемых значений,  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$  — неизвестный вектор параметров, который требуется оценить,  $p(\mathbf{d}; \boldsymbol{\theta})$  — условная плотность вероятности вектора наблюдений при некотором параметре  $\boldsymbol{\theta}$  (функция правдоподобия).

Функция правдоподобия для измеряемого параметра  $r_i$  определяется выражением

$$f(r_i | d_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(r_i - d_i)^2}{2\sigma_i^2}\right). \quad (28)$$

Для описанной выше модели наблюдения дисперсия оценки неизвестного параметра  $\boldsymbol{\theta}$  не может быть меньше нижней границы (НГКР), определяемой неравенством Крамера-Рао [13]

$$\text{var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{\mathbf{F}(\theta)} = \frac{1}{-\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{d}; \theta)}{\partial \theta^2}\right]}, \quad (29)$$

где  $\text{var}()$  — знак дисперсии,  $\mathbf{F}$  — информация Фишера,  $\mathbb{E}()$  — знак математического ожидания.

Натуральный логарифм функции правдоподобия  $f(r | \mathbf{x})$  с учетом (26) и (28)

$$\ln f(r | \mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi K_E) - \frac{1}{2} \ln\left[\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\|\right)^\beta\right] - \frac{1}{2K_E} \frac{\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\| - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\| - r\right)^2}{\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|\right)^\beta + \left(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\|\right)^\beta} \quad (30)$$

С учетом следующей замены в выражении (30), а именно

$$A = -\frac{1}{2} \ln\left[\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|\right)^\beta + \left(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\|\right)^\beta\right], \quad (31)$$

$$B = -\frac{1}{2K_E} \frac{\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\| - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\| - r\right)^2}{\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|\right)^\beta + \left(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\|\right)^\beta}. \quad (32)$$

производные, входящие в состав матрицы Фишера примут вид

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 A}{\partial \mathbf{x}^2}\right] &= \frac{\beta^2 \cdot \left[\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|\right]^{2\beta-2} \cdot \left(\frac{x - x_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|} + \frac{x - x_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}\right)^2}{2 \cdot \left[\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|\right)^\beta + \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\|^\beta\right]^2} \\ &+ \frac{\beta \cdot \left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|\right)^{\beta-1} \cdot \left[\frac{(x - x_1)^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|^3} + \frac{(x - x_i)^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^3} - \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|} - \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}\right]}{2 \cdot \left[\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|\right)^\beta + \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\|^\beta\right]} \\ &+ \frac{\beta(\beta - 1) \cdot \left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|\right)^{\beta-2} \cdot \left(\frac{x - x_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|} + \frac{x - x_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}\right)^2}{2 \cdot \left[\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|\right)^\beta + \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\|^\beta\right]} \\ \mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}\right] &= \frac{\beta(\beta - 1) \cdot \left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|\right)^{\beta-2} \cdot \left(\frac{x - x_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|} + \frac{x - x_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}\right)^2 \cdot \sigma_i^2}{2 \cdot K_E \cdot \left[\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|\right)^\beta + \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\|^\beta\right]^2} \\ &+ \frac{\beta^2 \cdot \left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|\right)^{2\beta-2} \cdot \left(\frac{x - x_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|} + \frac{x - x_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}\right)^2 \cdot \sigma_i^2}{K_E \cdot \left[\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|\right)^\beta + \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\|^\beta\right]^3} \\ &+ \frac{\beta \cdot \left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|\right)^{\beta-1} \cdot \sigma_i^2 \cdot \left[\frac{(x - x_1)^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|^3} + \frac{(x - x_i)^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^3} + \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|} - \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}\right]}{2 \cdot K_E \cdot \left[\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|\right)^\beta + \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\|^\beta\right]^2} \\ &+ \frac{\left(\frac{x - x_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|} + \frac{x - x_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}\right)^2}{K_E \cdot \left[\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|\right)^\beta + \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\|^\beta\right]} \end{aligned}$$

#### 4. Результаты моделирования

Оценка качества позиционирования объектов навигации выполнена с использованием разработанной модели ЛНС на базе асинхронного РДС, состоящей из четы-

рех ОП, ЦП с известными координатами и четырех ОН (БЛА), координаты которых требовалось определить на интервале времени их полета  $t = 60$  сек). Расстояние между ОП и группы БЛА составило от 50 до 70 км, а между БЛА  $\Delta_{1,2} = 8,6$  км,  $\Delta_{1,3} = 16,5$  км,  $\Delta_{1,4} = 11,5$  км,



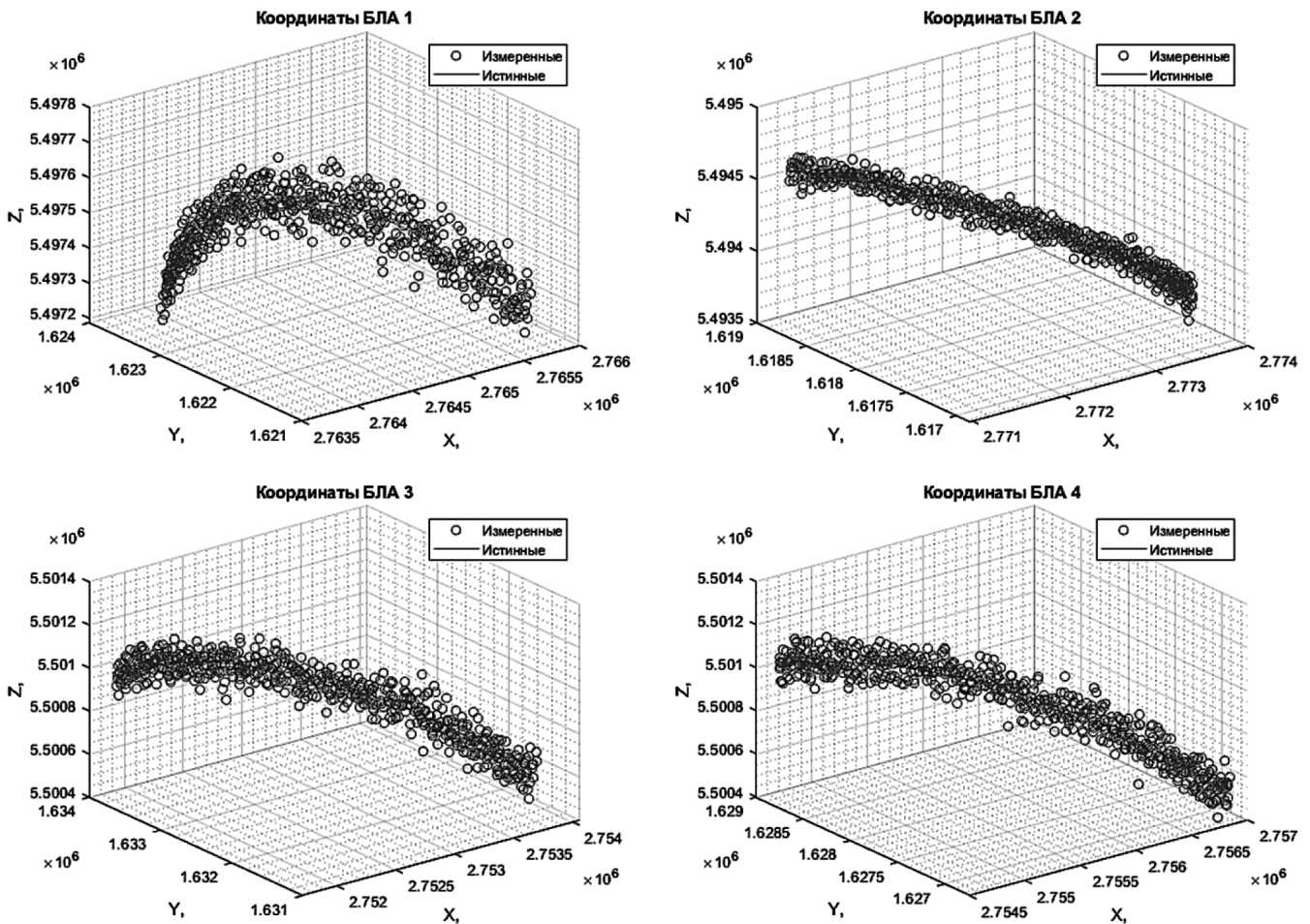


Рис. 4. Результаты моделирования (графики изменения мгновенных оценок координат БЛА, полученные с использованием предложенной ЛНС)

$\Delta_{2,3} = 25,1$  км,  $\Delta_{2,4} = 20,1$  км,  $\Delta_{3,4} = 5,6$  км. Удаление ЦП от ОП составило примерно 15 км. Измерения проводились с дискретностью 1 сек. Результаты измерений оформлены в виде графиков мгновенных значений координат БЛА. Результаты приведены на рисунке 4. При этом полагалось, что ошибки позиционирования ОП и ЦП отсутствовали.

### Заключение

Анализ полученных результатов показывает возможность позиционирования группы объектов навигации асинхронным суммарно-дальномерным способом с по-

грешностью по осям координат  $x, y, z$  не хуже значений 29 м, 20 м и 47 м соответственно при их значительном, до 70 км, удалении от элементов ЛНС. При нахождении ОН в зоне, ограниченной координатами ОП, ошибки измерений по осям  $x, y, z$  не превышают 90 см при условии отсутствия погрешностей в определении собственных координат ЦП и ОП.

Описанный подход позволяет обеспечить одновременную навигацию для всех БЛА в комплексе РТК без использования дорогостоящих систем точного времени за счет организации работы ЛНС в суммарно-дальномерном режиме.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Терентьев А.В., Коротков В.Ф. Радиотехническая разведка: Теория и практика обработки радиолокационных сигналов. — СПб.: Медиапапир, 2021. С.41–55.
2. Методы спутникового и наземного позиционирования. Перспективы развития технологий обработки сигналов. Под ред. Д. Дардари, Э. Фаллетти, М. Луи-зе. Москва: Техносфера, 2012. (с. 57–80, 118–200).
3. ICD-LOC-100A. Locata Net Positioning Control Document 2011. Locata Corp Pty Ltd, September 2011. [www.locatacorp.com](http://www.locatacorp.com).
4. J.C. Chen et al., "Coherent Acoustic Array Processing and Localization on Wireless Sensor Networks", Proc. of the IEEE, vol. 91, no. 8, pp. 1154–1162, August 2003.
5. S. Gezici, Z. Tian, G. B. Giannakis, H. Kobayashi, A. F. Molisch, H. V. Poor, and Z. Sahinoglu, "Localization via ultra-wideband radios: a look at positioning aspects for future sensor networks", IEEE Signal Processing Magazine, vol. 22, no. 4, pp. 70–84, 2005.
6. Уварова Н.А., Прохорцов А.В. Аналитическое нахождение координат по сигналам СНС на основе дальномерного метода // Инновационные наукоемкие информационные технологии. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. С. 62–65.
7. M. Sun and K. C. Ho, "Successive and asymptotically efficient localization of sensor nodes in closed-form", IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 57, no. 11, pp. 4522–4537, 2009.
8. W. Foy, "Position-location solutions by Taylor-series estimation", IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, vol. 2, no. AES-12, pp. 187–194, 1976.
9. A. M. C. So and Y. Ye, "Theory of semidefinite programming for sensor network localization", Mathematical Programming, vol. 109, no. 2-3, pp. 367–384, 2007.
10. Z. Sahinoglu, S. Gezici, and I. Guvenc, "Ultra-wideband positioning systems", Cambridge, New York, 2008.
11. K. Lui, F. Chan, and H. So, "Semidefinite programming approach for rangedifference based source localization", IEEE Trans. on Signal Processing, pp. 1630–1633, April 2009.
12. Чубич В.М. Вычисление информационной матрицы Фишера в задаче активной параметрической идентификации стохастических нелинейных дискретных систем // Науч. вестн. НГТУ. — 2009. — №1(34). — С. 23–40.
13. T. Jia and R. M. Buehrer, "A new Cramer-Rao lower bound for TOA-based localization", in Proc. IEEE Military Communications Conference, pp. 1–5, IEEE, 2008.

© Копыльцов Владимир Юрьевич ([vkopylsov@yandex.ru](mailto:vkopylsov@yandex.ru))

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»