

ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ МОДЕЛИ СТОКСА В РАСЧЕТАХ ОПОР СКОЛЬЖЕНИЯ

LIMITS OF APPLICABILITY OF THE STOKES MODEL IN THE CALCULATIONS OF SLIDING BEARINGS

V. Akhmetov

Summary. Viscous incompressible fluid flow in sliding bearings is calculated numerically. The main attention is paid to the study of flow separation regimes in the axial region of the flow with the formation of recirculation zones. The critical values of the parameters for the occurrence of separation are determined. The calculations are compared with the available data in which the Stokes model was used.

Keywords: swirling flows, viscous fluid, lubrication theory, finite-difference method, recirculation zones.

Ахметов Вадим Каюмович

Д.т.н., профессор, ФГБОУ ВО

«Национальный исследовательский

Московский государственный строительный

университет»

vadim.akhmetov@gmail.com

Аннотация. В рамках полной системы уравнений Навье-Стокса проведены расчеты течений вязкой несжимаемой жидкости для опор скольжения. Основное внимание уделено изучению режимов с отрывом потока в приосевой области течения и образованием рециркуляционных зон. Определены критические значения параметров для возникновения отрыва. Проведено сравнение расчетов с имеющимися исследованиями, в которых использовалась модель Стокса.

Ключевые слова: закрученные потоки, вязкая жидкость, теория смазки, конечно-разностный метод, рециркуляционные зоны.

При исследовании гидродинамики течений в опорах скольжения в большинстве случаев используется модель Стокса. В ней полностью исключаются из рассмотрения нелинейные члены в левой части уравнений движения. В настоящее время в опорах скольжения вращение происходит с достаточно большой скоростью. Поэтому даже при малой толщине смазочного слоя число Рейнольдса оказывается большим и использование модели может приводить к существенным ошибкам при расчете конструкций.

В представленной работе используется полная система уравнений Навье-Стокса для исследования гидродинамики течений в опорах скольжения. Результаты полученных расчетов сравниваются с имеющимися данными исследований, проведенных в рамках классической теории смазки.

1. Формулировка задачи и метод численного решения

Рассмотрим модель опоры скольжения в виде цилиндрической области радиуса R с вращающимся верхним основанием с заданной угловой скоростью ω_1 и открытой боковой поверхностью. Подача жидкости осуществляется через отверстие ($0 \leq r \leq R_0$) в неподвижном нижнем основании с постоянной скоростью V , а ее отток — через боковую поверхность.

Течения вязкой несжимаемой жидкости в предположении ламинарности и осесимметричности описываются системой уравнений Навье-Стокса. Используя цилиндрическую систему координат r, φ, z , ось z которой направлена по направлению входа потока, и вводя в качестве неизвестных величин функцию тока Ψ , завихренность Ω и азимутальную скорости V_φ , запишем эти уравнения в следующем виде:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = -\Omega \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (V_z \Omega) + \frac{\partial}{\partial r} (V_r \Omega) = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Omega}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial (V_\varphi)^2}{\partial z} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (V_z V_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r V_\varphi) + \frac{V_r V_\varphi}{r} = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{V_\varphi}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad \Omega = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (4)$$

Здесь все переменные представлены в безразмерной форме. Толщина слоя H взята за характерный линейный размер. В качестве характерной скорости берется величина $W = \omega_1 R$, к которой отнесены V_z , V_r и V_φ . Решение

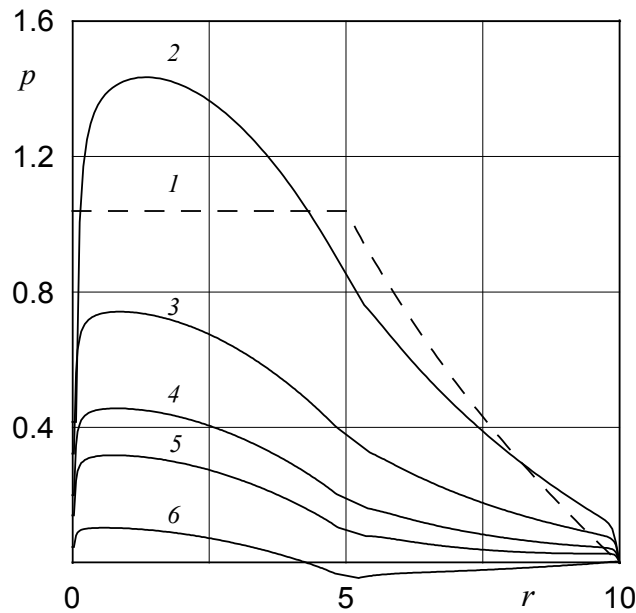


Рис. 1. Распределение давления при $z = 0, h = 0.1, V_0 = 0.1, \beta = 2, \gamma = 0, Re = 10$ в теории (кривая 1) и расчетах при $Re = 10, 20, 30, 40, 100$ (2–6)

задачи зависит от следующих четырех безразмерных параметров: числа Рейнольдса $Re = WH / \nu$ и коэффициентов $h = H / R, V_0 = V / W, \beta = R / R_0$, где ν — кинематическая вязкость,

Проведем исследование гидродинамики течения в цилиндрической области $D (0 \leq z \leq 1, 0 \leq r \leq r_k), r_k = R / H$. Краевыми условиями для поставленной задачи являются классические условия, применяемые в численных расчетах подобного типа, обеспечивающие симметрию потока, прилипание жидкости на твердых границах и равенство нулю первых производных от скорости потока в выходном сечении:

$$\psi = f_1(r), V_\varphi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, 0 \leq r \leq r_0, z = 0 \quad (5)$$

$$\psi = \psi_1, V_\varphi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, r_0 \leq r \leq r_k, z = 0 \quad (6)$$

$$\psi = 0, V_\varphi = \omega_1 r, \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, 0 \leq r \leq r_k, z = 1 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \Omega}{\partial r} = \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} = 0, r = r_k, 0 \leq z \leq 1 \quad (8)$$

$$\psi = 0, V_\varphi = 0, \Omega = 0, r = 0, 0 \leq z \leq 1 \quad (9)$$

где $f_1(r) = 0.5V_0 r^2, \psi_1 = f(r_0), r_0 = R_0 / H$.

Система уравнений (1) — (4) с краевыми условиями (5) — (9) полностью позволяет описать гидродинамику

исследуемого течения. Аналитическое решение поставленной задачи не представляется возможным. Численное решение осуществлялось методом конечных разностей с применением для уравнения Пуассона (1) метода неполной редукции, являющимся комбинацией метода Фурье и редукции, и итерационного метода установления для уравнений переноса (2) — (3). Данный метод апробирован при расчетах закрученных течений в [1].

2. Результаты расчетов

Диапазон параметров исследования рассматриваемых течений составлял: $0 \leq Re \leq 2000, 0.05 \leq h \leq 0.2, -1 \leq \gamma \leq 1, 0.05 \leq V_0 \leq 0.3, 1 \leq \beta \leq 20$.

В случае малых чисел Рейнольдса (например, при $Re = 10$) течение является безотрывным. В классической теории смазки распределение скорости в этом случае имеет вид [2]:

$$V_r(z) = \frac{1}{2\mu} (z - H) z \frac{dp}{dr}, \quad \frac{dp}{dr} = -\frac{6\mu Q}{\pi r H^3} \quad (10)$$

где Q — расход, μ — динамическая вязкость жидкости. Учитывая введенные выше безразмерные параметры, выражение (10) может быть записано в форме:

$$V_r(z) = -3V_0 r_0^2 (z - 1) z \quad (11)$$

В стоковом приближении для определения давления в рассматриваемой области, а также для значений

Таблица 1

β	1.5	2	2.5	3
h	$V_0=0.1$			
0.05	128.64	105.58	79.56	70.12
0.1	109.94	86.90	59.89	44.10
	$V_0=0.2$			
0.05	73.31	61.35	53.45	44.36
0.1	71.14	58.13	50.14	39.41

подъемной силы P смазочного слоя, в [2] получены выражения:

$$R_0 \leq r \leq R: \quad p(r) = p_1 \frac{\ln(R/r)}{\ln(R/R_0)}$$

$$0 \leq r \leq R_0: \quad p = p_1$$

$$p_1 = \frac{6\mu Q}{\pi H^3} \ln \frac{R}{R_0}, \quad P = p_1 \frac{\pi(R^2 - R_0^2)}{2 \ln(R/R_0)} \quad (12)$$

где p_1 — давление на входе в камеру.

После введения безразмерного коэффициента подъемной силы $\Phi_p = P/(R^2 \rho W^2)$ и с учетом введенных обозначений, выражение (12) примет вид:

$$p(r) = p_1 \frac{\ln(r_k/r)}{\ln \beta}, \quad p_1 = \frac{6}{\text{Re}} V_0 r_0^2 \ln \beta,$$

$$\Phi_p = \frac{3}{\text{Re}} V_0 r_0^2 \pi \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \quad (13)$$

На рис. 1 (кривая 1) показана зависимость распределения давления (13). Численное решение краевой задачи (1) — (9) соответствует кривой 2. Исходя из сравнения двух представленных зависимостей, можно сделать вывод, что характер распределения давления отличается только в начальной области при входе в камеру ($0 \leq r \leq r_0$), а далее практически совпадает.

При больших значениях числа Рейнольдса давление начинает уменьшаться (кривые 3–6). Это приводит к снижению значений значение коэффициента подъемной силы. При использовании приближения Стокса, как это следует из формулы (13), значение Φ_p асимптотически приближается к нулю при $\text{Re} \rightarrow \infty$. В случае числен-

ного решения полной системы уравнений Навье-Стокса существует некоторое критическое значение числа Рейнольдса Re_c , при котором Φ_p становится равным нулю.

Для $\text{Re} < \text{Re}_c$ линии тока показывают безотрывный характер течения. При $\text{Re} > \text{Re}_c$ происходит отрыв потока в приосевой части течения и создается замкнутая рециркуляционная область, имеющая тороидальную структуру, и приближение Стокса не работает. Такой эффект в данном случае является аналогом распада вихря в закрученных потоках [3, 4].

Критические значения чисел Рейнольдса, полученные при решении краевой задачи (1) — (9), представлены в табл. 1.

Заключение

Выполненные численные исследования показывают ограниченность применения модели Стокса и возможность ее использования только при значениях чисел Рейнольдса, не превосходящих некоторого критического значения Re_c . Проведенными расчетами установлено, что это критическое значение составляет $\text{Re}_c = 40 - 130$.

При больших значениях $\text{Re} > \text{Re}_c$ в опорах скольжения формируются зоны рециркуляции с обратным течением жидкости и дальнейший расчет конструкций в этом диапазоне чисел Рейнольдса возможен только с применением полной системы уравнений Навье-Стокса.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 18-01-00762).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахметов В.К., Шкадов В.Я. Численное моделирование вязких вихревых течений для технических приложений. М.: АСВ, 2009. 176 с.
2. Чернавский С.А. Подшипники скольжения. М.: Машгиз, 1963. 244 с.
3. Lucca-Negro O., O'Doherty T. Vortex breakdown: a review. Progr. in Energy and Comb. Sci. 2001. V. 27. P. 431–481.
4. Ахметов В.К., Шкадов В.Я. Устойчивость свободных и ограниченных закрученных течений с зонами рециркуляции // Инженерная физика. 2008. № 6. С. 6–13.