DOI 10.37882/2223-2966.2024.7-2.40

О РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ

ON SOLVING INVERSE PROBLEMS OF DYNAMICS

O. Shalaginova
R. Stakhno

Summary. The article presents an overview of inverse problems of dynamics that arise in the diagnosis of holonomic systems with lumped and distributed parameters under conditions of uncertainty, the formulation of inverse problems for non-holonomic systems, and their comparison with known inverse problems for holonomic systems. The problem of determining the type of mechanical system from the observed properties of motion is considered, as well as the identification of mechanical systems with the choice of the class of friction functions being sought and the description of classes of boundary conditions. It has been determined that statistical methods play a key role in identifying systems, as they allow data processing, considering random and systematic measurement errors, and assessing the degree of uncertainty in model parameters. The use of statistical methods in identification allows for qualitative data analysis, establishing connections between variables, and estimating model parameters and their uncertainty. This helps create accurate and reliable mathematical models of systems, which in turn allows you to more effectively manage systems, make informed decisions and develop new technologies and modern mechanisms.

Keywords: inverse problem of dynamics, differential equation, holonomic system, statistical method, oscillatory system.

Шалагинова Ольга Борисовна
кандидат физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский университет МВД России
shalaginova1337@yandex.ru
Стахно Роман Евгеньевич
кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский университет МВД России
piter_rus@mail.ru

Аннотация. В статье представлен обзор обратных задач динамики, возникающих при диагностике голономных систем с сосредоточенными и распределенными параметрами в условиях неопределённости, выполнена постановка обратных задач для неголономных систем, выполнено их сравнение с известными обратными задачами для голономных систем. Рассмотрена проблема определения типа механической системы по наблюдаемым свойствам движения, а также идентификация механических систем с выбором класса разыскиваемых функций трения и описание классов граничных условий. Определено, что статистические методы играют ключевую роль в идентификации систем, так как они позволяют обрабатывать данные, учитывать случайные и систематические ошибки измерений, а также оценивать степень неопределенности в параметрах моделей. Применение статистических методов в идентификации позволяет проводить качественный анализ данных, устанавливать связи между переменными, оценивать параметры моделей и их неопределенность. Это помогает создавать точные и надежные математические модели систем, что в свою очередь позволяет более эффективно управлять системами, принимать обоснованные решения и разрабатывать новые технологии и современные механизмы.

Ключевые слова: обратная задача динамики, дифференциальное уравнение, голономная система, статистический метод, колебательная система.

Введение

Обратные задачи динамики являются важным аспектом при диагностике голономных систем с сосредоточенными и распределенными параметрами в условиях неопределенности. Такие задачи связаны с определением начальных условий, параметров системы или воздействий на систему по известным данным о её поведении.

Для диагностики голономных систем с сосредоточенными и распределенными параметрами требуется учитывать как физические законы, описывающие динамику системы, так и данные о её поведении в условиях конкретной неопределенности. Обратные задачи динамики позволяют, например, определить параметры системы, которые трудно или невозможно измерить непосредственно.

При решении обратных задач динамики для голономных систем с распределенными параметрами важным является учет неопределенности параметров системы. Это может быть связано с ограниченной информацией о параметрах, случайными возмущениями или другими факторами, которые могут повлиять на точность диагностики.

Для успешного решения обратных задач динамики важно иметь точные математические модели системы, умение работать с различными методами оптимизации и идентификации параметров, а также учитывать возможные источники неопределенности, такие как шумы измерений, погрешности моделей и внешние возмущения.

Для более эффективного решения обратных задач динамики в условиях неопределенности широко используются методы оптимизации, идентификации параметров, а также статистические подходы. Эти методы позволяют учесть различные источники неопределенности и оптимизировать процесс диагностики для получения наиболее достоверных результатов.

Исследование и решение обратных задач динамики в диагностике голономных систем с сосредоточенными и распределенными параметрами в условиях неопределенности представляет собой сложную и актуальную задачу, которая находит применение в различных областях, включая робототехнику, авиацию, автоматизацию производственных процессов и другие.

Важным аспектом является различие между системами с сосредоточенными и распределенными параметрами. Системы с сосредоточенными параметрами характеризуются концентрацией массы и инерции в отдельных точках, что упрощает математическое моделирование и анализ их динамики.

С другой стороны, системы с распределенными параметрами имеют непрерывное распределение массы и инерции по всему объему или поверхности объекта, что усложняет задачу диагностики и определения параметров системы. В таких системах необходимо учитывать дополнительные факторы, такие как деформации, изменения формы и т. д.

Целью настоящей работы является обзор обратных задач динамики, возникающих при диагностике голономных систем с сосредоточенными и распределенными параметрами в условиях неопределённости, понятие о которых будет введено далее, постановка обратных задач для неголономных систем, сравнение их с рассмотренными в литературе обратными задачами для голономных систем.

Постановка задачи

Обратными задачами динамики называются задачи определения активных сил и моментов, приложенных к системе, параметров системы и дополнительно наложенных на нее связей, при которых движение с заданными свойствами является одним из возможных движений рассматриваемой системы [1].

Дадим сначала краткий обзор известных классических обратных задач динамики для голономных систем с сосредоточенными параметрами с указанием методов их решения.

Термин «голономный» происходит от греческого слова «holon» (всецелый, целостный) и относится к системам, у которых все связи внутри них выражаются через координаты и, следовательно, определяются полностью. Однако в ряде сложных систем возникают отклонения от голономности из-за деформаций, нелинейностей и других факторов, что требует специального подхода при анализе и управлении такими системами

Система называется голономной, если все ограничения, которые её связывают, могут быть выражены с помощью уравнений с явным указанием координат. Голономные системы могут быть как механическими системами (например, маятник, механизмы, механические конструкции), так и другими типами систем (например, электрические или гидравлические системы). Они обладают определенными свойствами, позволяющими удобно описывать их состояние и динамику с помощью уравнений.

В голономных системах ограничения, которые связывают элементы системы, не зависят от времени и задаются явным образом через координаты элементов системы. Такие ограничения могут быть известны заранее и использоваться для анализа и управления системой. Голономные системы представляют особенный интерес для исследования динамики, управления и диагностики в различных областях науки и техники.

Важным свойством голономных систем является возможность определить их состояние полностью по значению координат элементов системы. Это облегчает моделирование и анализ динамики таких систем, так как все ограничения и связи между элементами можно учитывать явно. Поэтому математическое описание поведения голономных систем часто оказывается более простым и удобным.

Изучение голономных и неголономных систем имеет важное значение для решения различных задач в области робототехники, автоматизации производства, транспортных средств, механики и других областей техники и науки. Понимание природы ограничений в системах позволяет более эффективно и точно управлять ими, создавать новые технологии и повышать уровень автоматизации и точности в различных сферах жизни.

В голономных системах, когда связи накладывают ограничение на положение точек, но ни на их скорости, решение обратных задач динамики сводится решению обратных задач теории обыкновенных дифференциальных уравнений, где по заданным интегралам (решениям) определяются коэффициенты или правые части уравнений.

Методы и материалы

Задачи построения уравнений движения в виде нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка могут быть представлены в следующих вариантах.

1. Основная задача построения уравнений движения.

Построить правые части системы уравнений

$$y''_\nu = Y_\nu(y, y', t) \ (\nu = 1,2,\ldots,n)$$

по заданному интегральному многообразию (решению)

$$\Omega : \omega_\mu(y, y', t) = C_\mu \ (\mu = 1,2,\ldots,m \le n)$$

2. Восстановление уравнений движения.

Дана система уравнений

$$y''_\nu = Y_{o\nu}(y, y', t) \ (\nu = 1,2,\ldots,n).$$

Определить вектор-функцию

$$\nu = \left[\nu_1(y, y', t),\ldots,\nu_k(y, y', t)\right]$$

по заданному интегральному многообразию (решению)

$$\Omega : \omega_\mu(y, y', t) = C_\mu \ (\mu = 1,2,\ldots,m \le n)$$

3. Замыкание уравнений движения.

Дана система уравнений

$$y''_\nu = Y_{o\nu}(y, y', u, u', t) \ (\nu = 1,2,\ldots,n).$$

Построить правые части системы замыкающих уравнений

$$u''_\rho = U_\rho(y, y', u, u', t) \ (\nu = 1,2,\ldots,r)$$

по заданному интегральному многообразию (решению) [1]

$$\Omega : \omega_\mu(y, y', t) = C_\mu \ (\mu = 1,2,\ldots,m \le r)$$

Все возможные видоизменения задач построения дифференциальных уравнений описываются указанными выше основными вариантами постановки этих задач.

Основная задача построения уравнений движения может быть рассмотрена на следующих примерах.

Первый пример — задача об определении силы, под действием которой материальная точка при любых начальных условиях движется по коническому сечению

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e \cdot x + p,$$

e — эксцентриситет,
p — фокальный параметр.

Предполагается, что сила зависит лишь от положения точки (x, y). Решение задачи сводится к построению правых частей системы двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$x'' = X(x, y)$$
$$y'' = Y(x, y)',$$

для которой коническое сечение является интегральной кривой (решением). С такой информацией о свойствах движения находим проекции искомой силы:

$$X(x, y) = -\frac{c^2}{p}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}$$
$$Y(x, y) = -\frac{c^2}{p}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{y}{r}'$$

c=const.

Следовательно, искомая сила является силой притяжения с центром в фокусе конического сечения, обратно пропорциональной квадрату расстояния движущейся точки от центра.

Следующий пример — задача об отыскании силовой функции U, определяющей силы, которые вызывают движение голономной механической системы с заданными интегралами (решениями). Например, задача построения силовой функции в случае, когда материальная точка совершает движение по заданной плоской кривой

$$\omega(x, y) = 0.$$

Множество искомых силовых функций в данной задаче определяется из интеграла энергии

$$U = T - h,$$

T — кинетическая энергия

$$U = -\Pi,$$

П — потенциальная энергия,
h=const

и может быть представлено в виде

$$U = \frac{1}{2}\cdot M^2(x, y)\cdot\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right] + \Phi(\omega, x, y) - h,$$

где $M(x, y)$, $\Phi(\omega, x, y)$ — произвольные, дифференцируемые в области определения $\omega(x, y)$ функции,

$\Phi(\omega, x, y)$ удовлетворяет условию $\Phi(0, x, y) = 0$

Из полученного общего соотношения можно найти и решение предыдущей задачи:

$$U = \frac{c^2}{p}\cdot\frac{1}{r^2} - h..$$

Ещё один пример основной задачи — задача о построении уравнений движения механических систем, допускающих линейный относительный интегральный инвариант. Задача эта заключается в следующем. В процессе движения механической системы интеграл Пуанкаре-Картана (энергии)

$$J = \oint_C \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \delta \cdot q_i - H \cdot \delta \cdot t,$$

где H — гамильтониан системы,

$q\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, $p\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ — соответственно векторы обобщённых скоростей и импульсов, взятый вдоль произвольной замкнутой кривой не меняет своего значения при произвольном смещении этой кривой с соответствующей деформацией вдоль трубки действительных траекторий изображающей точки $M(p, q, t)$ в расширенном фазовом пространстве.

Построим уравнения движения этой механической системы в виде

$$q'_i = Q_i(q, p, t)$$
$$p'_i = P_i(q, p, t), \ (i = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}).$$

Из решения следует, что движение системы описывается каноническими уравнениями

$$q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$
$$p'_i = \frac{\partial P}{\partial q_i}, \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

С гамильтонианом $H(q, p, t)$, входящим в интегральный инвариант.

Задачу восстановления уравнений движения проиллюстрируем на обратной задаче динамики точки переменной массы, где требуется определить закон изменения массы точки и скорость изменяющейся массы так, чтобы в заданном поле сил точка переменной массы совершала движение по заданной траектории или заданному закону. В данной задаче структура уравнений предполагается известной, и определяются параметры механических систем и дополнительные силы, входящие в уравнения движения, при которых заданное движение является одним из возможных движений рассматриваемой системы, и тем самым восстанавливаются соответствующие уравнения движения этой системы. Так, например, в задаче осуществления движения тяжёлой точкой переменой массы $m(t)$ по заданным изменениям дальности y и высоты z

$$y = \varphi(t)$$
$$z = \psi(t)$$

уравнения движения точки имеют следующий, определённый самой задачей вид:

$$my'' = m' \cdot (\mu - 1) y' - m \cdot f(z, \nu) \cdot \frac{y'}{\nu}$$

$$mz'' = m' \cdot (\eta - 1) z' - m \cdot f(z, \nu) \cdot \frac{z'}{\nu} - m \cdot g,$$

где $f(z, \nu)$ — величина сопротивления среды, отнесённая к единичной массе,

$\nu = \sqrt{y'^2 + z'^2}$ — скорость точки,

$\mu = \mu(t)$, $\eta = \eta(t)$ — отношение проекций скоростей изменяющейся массы самой точки на оси координат Y, Z. Для определения необходимых законов величин μ, η и m получаем следующие условия:

$$\mu = 1 + \frac{m}{m'} \cdot \left[\frac{\varphi''}{\varphi'} + \frac{f(\varphi(t), \nu_0)}{\nu_0} \right]$$
$$\eta = 1 + \frac{m}{m'} \cdot \left[\frac{\psi''}{\psi'} + \frac{g}{\psi'} + \frac{f(\psi(t), \nu_0)}{\nu_0} \right]$$
$$\nu_0 = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}.$$

Отсюда видно, что окончательное определение искомых величин возможно лишь при наличии дополнительного условия, например, на величину относительной скорости изменяющейся массы

$$u_0 = \sqrt{(\mu - 1)^2 \varphi'^2 + (\mu - 1)^2 \psi'^2}.$$

Задачу замыкания уравнений движения рассмотрим на примере обратной задачи динамики твердого тела с одной закреплённой точкой. Это задача об определении таких условий на геометрию масс твёрдого тела и приложенные к нему силы, при которых соответствующие уравнения движения этого твёрдого тела вокруг неподвижной точки допускают заданные интегралы (решения). Самой поставленной задачей полностью определяется часть уравнений (кинематические уравнения) [2]

$$\psi' = \frac{x_1 \cdot \sin\varphi + x_2 \cdot \cos\varphi}{\sin\theta}$$
$$\theta' = x_1 \cdot \cos\varphi - x_2 \cdot \sin\varphi$$
$$\varphi' = x_3 - (x_1 \cdot \sin\varphi + x_2 \cdot \cos\varphi) \cdot \mathrm{ctg}\theta,$$

где x_1, x_2, x_3 — проекции мгновенной угловой скорости тела на главные оси X, Y, Z эллипсоида инерции, построенного в неподвижной точке тела;

ψ, θ, φ — углы Эйлера;

известна также и структура остальных уравнений (динамические уравнения)

$$A \cdot x'_1 = (B - C) \cdot x_2 \cdot x_3 + L_1$$

$$B \cdot x'_2 = (C - A) \cdot x_3 \cdot x_1 + L_2$$

$$C \cdot x'_3 = (A - B) \cdot x_1 \cdot x_2 + L_3.$$

Задача заключатся в отыскании условий, наложенных на моменты инерции A, B, C относительно главных осей и на проекции главного момента L_1, L_2, L_3 внешних сил на эти же оси. В итоге система становится замкнутой системой дифференциальных уравнений.

Определим, например, условия осуществления регулярной прецессии в случае Лагранжа. Частными интегралами здесь являются следующие равенства:

$$\omega_1 = x_1 \cdot \sin\varphi + x_2 \cdot \cos\varphi - n_1 \cdot \sin\theta_0 = 0$$

$$\omega_2 = x_1 \cdot \cos\varphi + x_2 \cdot \sin\varphi = 0$$

$$\omega_3 = x_3 - n_1 \cdot \cos\theta_0 - n_2 = 0,$$

выражающие само определение регулярной прецессии.

($\theta = \theta_0$, $\psi' = n_1$, $\varphi' = n_2$ — постоянные). Динамические уравнения записываются следующим образом:

$$A \cdot x'_1 = (A - C) \cdot x_2 \cdot x_3 + M \cdot g \cdot z_c \cdot x_5$$
$$B \cdot x'_2 = (C - A) \cdot x_3 \cdot x_1 - M \cdot g \cdot z_c \cdot x_4$$
$$x'_3 = 0,$$

где z_c — расстояние центра тяжести тела от неподвижной точки,

$$x_4 = \sin\theta_0 \cdot \sin\varphi,$$
$$x_5 = \sin\theta_0 \cdot \cos\varphi,$$

$M\,.\,g$ — вес тела.

Искомое условие осуществимости регулярной прецессии тяжёлого твердого тела с одной закреплённой точкой в случае Лагранжа имеет вид

$$M \cdot g \cdot z_c + (A - C) \cdot n_1^2 \cdot \cos\theta_0 = C \cdot n_1 \cdot n_2.$$

Отметим фундаментальность рассматриваемых обратных задач. Так, например, решение задачи о движении по коническому сечению привело к открытию закона всемирного тяготения, а решение задачи с интегральным инвариантом к установлению принципа сохранения количества движения и энергии; математическое обобщение рассмотренных задач динамики твёрдого тела с одной закреплённой точкой и динамики тела переменой массы, а также задачи об отыскании силовой функции стали одними из основных задач космонавтики, ракетодинамики, теории построения систем программного движения.

Метод решения поставленных обратных задач впервые был сформулирован Н.П. Еругиным. Согласно этому методу, прежде всего составляются необходимые и достаточные условия того, что заданные интегралы действительно образуют интегральное многообразие строящейся системы дифференциальных уравнений. Эти условия получаются приравниванием производных заданных интегралов, составленных в силу искомых уравнений, произвольным функциям, обращающимся в нуль на заданном интегральном многообразии. Так, в основной задаче и задаче восстановления необходимые условия осуществимости движения с теми или иными заданными свойствами имеют вид

$$\left(grad\omega_\mu \cdot Y\right) + \left(grad\omega_\mu \cdot y'\right) + \frac{\partial\omega_\mu}{\partial t} =$$
$$= \Phi_\mu\left(\omega, y, y', t\right),\ \left(\mu = 1, \dots m\right),$$

где $Y\left\{Y_1, \dots, Y_n\right\}$ — вектор-функция правых частей уравнения,

$\Phi_\mu\left(\omega, y, y', t\right)$ — функции произвольные при $c_\mu = 0$, обращающиеся в нуль на интегральном многообразии: $\Phi_\mu = 0$ при $c_\mu = 0$.

При решении задачи замыкания необходимые условия осуществимости движения с заданными свойствами будут иметь следующий вид

$$\left(grad\omega'_\mu \cdot U\right) + \left(grad\omega'_\mu \cdot Y_0\right) + \left(grad\omega'_\mu \cdot y'\right) +$$
$$+\left(grad\omega'_\mu \cdot u'\right) + \frac{\partial\omega'_\mu}{\partial t} = \Phi_\mu\left(\omega, y, y', t\right),\ \left(\mu = 1, \dots m\right)$$

где $Y_0\left\{Y_{01}, \dots, Y_{0n}\right\}$, $U\left\{U_1, \dots, U_r\right\}$, — вектор-функции правых частей уравнений,

$$\omega'_\mu = \left(grad\omega_\mu \cdot Y_0\right) + \left(grad\omega_\mu \cdot y'\right) + \frac{\partial\omega_\mu}{\partial t}.$$

Обратимся теперь к обратным задачам динамики для голономных систем с распределёнными параметрами. Их решение сводится к решению обратных задач математической физики, которые могут быть поставлены в трёх вариантах.

1. Задача определения коэффициентов дифференциального уравнения.
2. Нахождение начальных условий.
3. Нахождение граничных условий.

Заметим, что граничные условия могут зависеть от перемещения, времени и скорости движения.

Между решениями задач математической физики при определённых условиях можно установить взаимно-однозначное соответствие. Существуют полезные связи между решениями уравнений различных типов при рассмотрении обратных задач. Оказывается, возможным при исследовании обратных задач для уравнений параболического или эллиптического типов переходить к исследованию некоторых эквивалентных им задач для уравнений гиперболического типа.

Рассмотрим пример решения обратной динамической задачи математической физики для гиперболического уравнения. Это обратная задача третьего типа, где требуется восстановить неизвестное граничное условие, причём движение предполагается заданным не интегральным многообразием, а свойствами интегрального многообразия — некими ограничениями, набором качественных признаков из экспериментальных наблюдений, то есть в условиях неопределённости.

Общую методику исследования представим н примере задачи, обратной к динамической контактной задаче с трением между упругим телом и абсолютно жёстким. В качестве таких тел выбраны области с круговыми границами контакта. В этой обратной задаче требуется восстановить одно из граничных условий

$$K(u) = F(t) \text{ при } r = R_2$$

— силу трения $F(t)$ — для уравнения математической физики

$$L(u) = u''$$

гиперболического типа со вторым известным граничным условием

$$\Phi(u) = C(t) \text{ при } r = R_1$$

и с начальными условиями

$$u = A(r) \text{ при } t = 0$$
$$u' = B(r) \text{ при } t = 0.$$

Имеем, как уже говорилось, описание движения не интегральным многообразием рассматриваемого движения, а его свойствами, данными экспериментальных наблюдений — проведённым несколько раз рядом измерений величин перемещения «u» в некоторые последовательные моменты времени. Таким образом возникает первая проблема — описать эти экспериментальные данные математически — функцией с неопределёнными параметрами. В частности, это можно сделать линейной аппроксимацией — соединяя в каждой серии измерений две соседние точки отрезками прямых.

Так как измерения в каждой серии отличаются друг от друга, то мы получим в качестве картины движения некоторую область с верхней и нижней границами.

Теперь возникает вторая проблема — по наблюдаемым свойствам движения определить тип данной механической системы — идентифицировать механическую систему и выбрать класс разыскиваемых функций трения, то есть описать класс граничных условий, сформулировать признаки, по которым выбираем данную зависимость. Качественная идентификация основана на применении статистических методов. Идентификация систем является важной задачей в различных областях, включая технические системы, биологические системы, экономику и многие другие. Идентификация позволяет определить параметры системы на основе имеющихся данных и моделей, что в свою очередь позволяет точно описывать поведение системы и предсказывать ее будущее состояние.

Статистические методы играют ключевую роль в идентификации систем, так как они позволяют обрабатывать данные, учитывать случайные и систематические ошибки измерений, а также оценивать степень неопределенности в параметрах моделей. Статистические методы могут включать в себя различные подходы, такие как метод наименьших квадратов, метод максимального правдоподобия, методы байесовской статистики и др.

Применение статистических методов в идентификации позволяет проводить качественный анализ данных, устанавливать связи между переменными, оценивать параметры моделей и их неопределенность. Это помогает создавать точные и надежные математические модели систем, что в свою очередь позволяет более эффективно управлять системами, принимать обоснованные решения и разрабатывать новые технологии и продукты.

Таким образом, применение статистических методов в идентификации систем играет важную роль в повышении качества анализа данных, улучшении точности моделирования систем и обеспечении надежности и эффективности в различных областях науки и техники.

Так как в нашей задаче возникают механические релаксационные колебания (прерывистое или скачкообразное движение), то надо проводить идентификацию колебательных систем. Рассмотрим 5 типов колебательных систем:

1. Автоколебательная система, в которой при отсутствии внешних возмущений возможны устойчивые периодические колебания.
2. Система со случайным внешним возбуждением.
3. Система со случайным параметрическим возбуждением.
4. Система с периодическим внешним возбуждением.
5. Система с периодическим параметрическим возбуждением [3].

Критерии распознавания систем этих типов основаны на анализе плотности вероятности $\omega(\nu)$ квадрата амплитуды наблюдаемого процесса и на его анализе плотности вероятности $\omega(\varphi)$ фазы наблюдаемого процесса. Мы выбрали систему I типа — автоколебательную систему. Так как система автоколебательная, к тому же колебания релаксационные, то этот класс разыскиваемых функций трения существенно не линеен. Функция трения может зависеть от множества параметров, таких как скорость скольжения, давление, температура, масла и другие факторы, что приводит к сложной и нелинейной зависимости между силой трения и этими параметрами. В реальных системах трение обычно исследуется с использованием эмпирических моделей, которые могут быть нелинейными и неоднородными. Для описания таких функций трения могут применяться различные математические подходы, включая полиномиальные модели, модели нейросетей, модели с нелинейными уравнениями и другие. Для анализа и моделирования нелинейных функций трения широко применяются методы численного моделирования, оптимизации параметров, а также экспериментальные методы и тестирование. Постоянные исследования в этой области помогают улучшать модели и понимание процессов трения, что в итоге способствует более эффективной работе технических систем.

Приведём классификацию функций трения, зависящих от скорости движения:

степенное $F = k_1 \cdot |x'|^{k_2 - 1} \cdot x'$,

кулоново $F = k \cdot \dfrac{x}{|x'|}$,,

линейное и кубическое $F = k_1 \cdot x' - k_2 \cdot x'^3$,

кулоново, линейное и кубическое

$$F = k_1 \cdot \frac{x}{|x'|} - k_2 \cdot x' + k_3 \cdot x'^3.$$

Мы выбираем силу трения $F(t)$, нелинейно зависящую от времени движения, дополняя эту классификацию.

Далее решаем прямую задачу для гиперболического уравнения, где интересующее нас граничное условие — сила трения — задано пока неизвестной функцией $F(t)$.

Решение ищем в виде

$$u(r,t) = w(r,t) + \tilde{u}(r,t),$$

где $w(r, t)$ удовлетворяет соответствующему уравнению статики

$$L(w) = 0$$

с граничными условиями

$$K(w) = F(t) \text{ при } r = R_2$$
$$\Phi(w) = C(t) \text{ при } r = R_1,$$

а $\tilde{u}(r,t)$ удовлетворяет уравнению

$$L(\tilde{u}) + g(r,t) = \tilde{u}''$$

с нулевыми граничными

$$K(\tilde{u}) = 0 \text{ при } r = R_2$$
$$\Phi(\tilde{u}) = 0 \text{ при } r = R_1$$

и со следующими начальными условиями

$$\tilde{u} = A(r) - w(r,t) \text{ при } t = 0$$
$$\tilde{u}' = B(r) - w'(r,t) \text{ при } t = 0.$$

Решение задачи в свою очередь ищем в виде

$$\tilde{u}(r,t) = u_1(r,t) + u_2(r,t),$$

где $u_1(r, t)$ удовлетворяет уравнению с нулевыми граничными условиями и с нулевыми начальными условиями

$$u_1(r,t) = 0 \text{ при } t = 0$$
$$u'_1(r,t) = 0 \text{ при } t = 0,$$

а $u_2(r,t)$ однородному уравнению

$$L(u_2) = u''_2$$

с приведёнными выше начальными и нулевыми граничными условиями.

Задачи для $u_1(r, t)$ и $u_2(r, t)$ решаются методом разделения переменных. Их решения получены в виде бесконечных рядов по специальным функциям (Бесселя и Неймана). Получив таким образом аналитическое решение $u(r, t)$ прямой задачи, зависящее от неизвестной пока функции силы трения $F(t)$, приравниваем его к той функции с неопределёнными параметрами, которую мы задали по экспериментальным наблюдениям вначале. Обозначим её также $u(r, t)$. Возникает следующая задача решения получившегося уравнения с неопределёнными параметрами для отыскания вида функции силы трения $F(t)$. В нашей задаче при фиксированном r получается неоднородное граничное интегральное уравнение II рода — уравнение Вольтера с непрерывным ядром $\nu(r, t)$ и с заданным λ

$$u(r,t) = F(t) - \lambda \cdot \int_0^t F(\tau) \cdot \nu(t - \tau) \cdot d\tau,$$

которое сводится к интегральному уравнению Фредгольма

$$u(r,t) = F(t) - \lambda \cdot \int_0^\infty F(\tau) \cdot \nu(t - \tau) \cdot d\tau$$

и решается численно. Также, как и в приведённых выше необходимых условиях осуществимости движения с заданными свойствами для обратных задач обыкновенных дифференциальных уравнений, получилось уравнение для определения неизвестной функции, связывающее известное решение и эту неизвестную функцию — в данном случае граничное условие, зависящее от времени. Решив это уравнение, получаем функцию силы трения также с неопределёнными параметрами, в общем виде.

Заключение

Обратные задачи восстановления в условиях неопределенности представляют собой сложную область исследований, где основной задачей является определение параметров модели или распределений данных на основе неполной, зашумленной или искаженной информации. Такие задачи часто возникают в различных областях.

В условиях неопределенности решение обратных задач восстановления становится особенно сложным из-за неизвестности параметров модели, наличия шумов в данных и недостаточной информации. Для решения таких задач часто применяются статистические методы, методы оптимизации, а также методы машинного обучения.

Важным аспектом в решении обратных задач в условиях неопределенности является учет вероятностных распределений параметров модели и данных, что позволяет оценивать неопределенность в результатах и проводить статистически обоснованный анализ. Также в таких задачах часто применяются методы регуляризации для сглаживания решений и уменьшения чувствительности к шумам.

В общем, решение обратных задач восстановления в условиях неопределенности представляет собой актуальную и сложную проблему, требующую комплексного подхода и использования различных методов и инструментов для достижения надежных и точных результатов. Однако с развитием методов обработки данных, статистики и машинного обучения появляются новые возможности для эффективного решения подобных задач.

Случай, рассмотренный в этой работе более общий, чем в условиях определённости, так как включает в себя подстановкой конкретных параметров и определённые случаи, как частные. Тем не менее теория обратных задач с неопределённостью базируется на теории классических обратных задач, подходит под описанную выше классификацию.

Также, как и обратные задачи в условиях неопределённости, в литературе ещё не рассматривались и обратные задачи для неголономных систем — систем с неинтегрируемыми кинематическими связями, накладывающими ограничения на положения точек и на их скорости. В ходе решения обратной задачи для неголономных систем требуется по заданным интегралам (решениям) определить не только уравнения движения рассматриваемых систем, но и эти кинематические уравнения связи, что накладывает ряд трудностей. Поновому, должна решаться проблема составления необходимых и достаточных условий того, что заданные интегралы (решения) действительно образуют интегральное многообразие строящейся системы дифференциальных уравнений и удовлетворяют кинематическим уравнениям связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пономарева С.М. Системы Якоби: основные задачи динамики, методы решения: автореферат дис. кандидата физико-математических наук: 01.02.01 / Рос. ун-т дружбы народов. — Москва, 1998. — 13 с.
2. Гафаров Г.Г. Обратные задачи динамики в групповых переменных / Г.Г. Гафаров. — Москва: Физматлит, 2015. — 119 с.
3. Захаров А.В. Решение обратной задачи динамики в ОТО по алгебрам первых интегралов: диссертация кандидата физико-математических наук: 01.04.02. — Уфа, 1987. — 113 с.

© Шалагинова Ольга Борисовна (shalaginova1337@yandex.ru); Стахно Роман Евгеньевич (piter_rus@mail.ru)
Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»