УДК 517.926

ЖЕЛДАШЕВА А.О.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова», г. Нальчик, Российская Федерация

jeldasheva_ao@mail.ru

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

В настоящей работе исследована однозначная разрешимость краевой задачи для параболо-гиперболического уравнения второго порядка с разрывными условиями сопряжения. Существование решения установлено методом редукции к вопросу разрешимости соответствующего интегрального уравнения Фредгольма, а при доказательстве единственности решения использован метод интегралов энергии.

***Ключевые слова**: краевая задача; уравнение смешанного типа; разрывные условия сопряжения; интегральное уравнение; метод интегралов энергии.*

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_y+cu,\ в\ \Omega_0, \\ u_{xx}-u_{yy}+\lambda^2 u,\ в\ \Omega_1, \end{cases} \tag{1}$$

где Ω_0 – область ограниченная отрезками *AB, BC, CO* и *OA* прямых $x=1$, $y=1$, $x=0$, $y=0$ соответственно; область Ω_1 – характеристический треугольник, ограниченный отрезком *OA* оси абсцисс и двумя характеристиками *AD*: $x-y=1$, *OD*: $x+y=0$ уравнения (1), выходящими из точек *A*, *O* и пересекающимися в точке *D*; $\lambda=const$ и $c=c(x,y)$ – заданные коэффициенты.

Пусть $\tau^{\pm}(x)=\lim\limits_{y\to 0\pm}u(x,y)$, $\nu^{\pm}(x)=\lim\limits_{y\to 0\pm}u_y(x,y)$. В области $\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1\cup OA$ для уравнения (1) исследована следующая

Задача N. Найти регулярное в области Ω_i (*i*=0,1) решение уравнения (1) из класса $C(\bar{\Omega}_i)\cap C^1(\Omega_i\cup OA)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{AB}=\psi_1(y), \tag{2}$$

$$u|_{CO}=\psi_2(y), \tag{3}$$

$$u|_{OD}=\varphi(x), \tag{4}$$

и условиям сопряжения [1-2]:

$$\begin{gathered} \tau^+(x)=\alpha(x)\tau^-(x)+\beta(x)\nu^-(x)+\gamma(x), \\ \nu^+(x)=\delta(x)\int\limits_0^x \nu^-(t)\,dt+\sigma(x), \end{gathered} \tag{5}$$

и обладающее тем свойством, что $\nu^+(x)\in L[0,1]$.

Здесь $\psi_{1,2}(y),\sigma(x)\in C[0,1]$, $\varphi(x),\alpha(x),\beta(x),\gamma(x),\delta(x)\in C^2[0,1]$ – заданные функции, причем $\beta(x)\delta(x)\neq 0$.

Соотношение же между $\tau^-(x)$ и $\nu^-(x)$, принесенное на отрезок *AO* из гиперболической части Ω_1 смешанной области Ω можно получить на основе решения соответствующей задачи Коши:

$$u(x,y)=\frac{\tau^-(x+y)+\tau^-(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu^-(t)J_0\left(|\lambda|\sqrt{(x-t)^2-y^2}\right)dt+$$

$$+\frac{|\lambda| y}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\tau^{-}(t)\frac{J_1\left(|\lambda|\sqrt{(x-t)^2-y^2}\right)}{\sqrt{(x-t)^2-y^2}}dt.$$

Действительно, удовлетворяя данное соотношение условию (4), получим

$$\tau^{-}(x)-\int\limits_0^x \nu^{-}(t)J_0\left(|\lambda|\sqrt{t^2-xt}\right)dt+\frac{|\lambda| x}{2}\int\limits_0^x \tau^{-}(t)\frac{J_1\left(|\lambda|\sqrt{t^2-tx}\right)}{\sqrt{t^2-tx}}dt=2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-\varphi(0).$$

Отсюда, принимая во внимание равенство:

$$\frac{\partial}{\partial x}J_0\left(|\lambda|\sqrt{t^2-xt}\right)=\frac{|\lambda| t}{2\sqrt{t^2-xt}}J_1\left(|\lambda|\sqrt{t^2-xt}\right),$$

будем иметь

$$\tau^{-}(x)+\int\limits_0^x \tau^{-}(t)\frac{x}{t}\frac{\partial}{\partial x}J_0\left(|\lambda|\sqrt{t^2-xt}\right)dt=2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-\varphi(0)+$$

$$+\int\limits_0^x \nu^{-}(t)I_0\left(|\lambda|\sqrt{tx-t^2}\right)dt.$$

Обращая полученное интегральное уравнение Вольтерра второго рода по формулам [3]:

$$M(x)-\int\limits_0^x M(t)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right]dt=N(x),$$

$$N(x)+\int\limits_0^x N(t)\frac{x}{t}\frac{\partial}{\partial x}J_0\left[\sqrt{\lambda t(x-t)}\right]dt=M(x),$$

получим

$$\tau^{-}(x)=2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-\varphi(0)+\int\limits_0^x \nu^{-}(t)I_0\left(|\lambda|\sqrt{tx-t^2}\right)dt-$$

$$-\int\limits_0^x\left\{2\varphi\left(\frac{t}{2}\right)-\varphi(0)+\int\limits_0^t \nu^{-}(\xi)I_0\left(|\lambda|\sqrt{\xi t-\xi^2}\right)d\xi\right\}\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(|\lambda|\sqrt{x^2-xt}\right)dt.$$

Отсюда, с учетом того, что [4]:

$$\int\limits_\xi^x I_0\left(|\lambda|\sqrt{\xi t-\xi^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(|\lambda|\sqrt{x^2-xt}\right)dt=I_0\left(|\lambda|\sqrt{\xi x-\xi^2}\right)-J_0\left[|\lambda|(x-\xi)\right],$$

можем переписать

$$\tau^{-}(x)=p(x)-\int\limits_0^x \nu^{-}(t)\left\{I_0\left(|\lambda|\sqrt{tx-t^2}\right)-J_0\left[|\lambda|(x-t)\right]\right\}dt+\int\limits_0^x \nu^{-}(t)I_0\left(|\lambda|\sqrt{tx-t^2}\right)dt.$$

Соотношение, связывающее $\tau^{-}(x)$ и $\nu^{-}(x)$, принесенное из гиперболической части смешанной области Ω окончательно представимо в виде:

$$\tau^{-}(x)=p(x)+\int\limits_0^x \nu^{-}(t)J_0\left[|\lambda|(x-t)\right]dt, \qquad (6)$$

где

$$p(x)=2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-\varphi(0)+\int\limits_0^x\left[2\varphi\left(\frac{t}{2}\right)-\varphi(0)\right]\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[|\lambda|\sqrt{x^2-xt}\right]dt.$$

Переходя к пределу при $y\to 0+$ в уравнении (1) в области Ω_0, будем иметь:

$$T_+\tau(x)=\nu(x). \tag{7}$$

Здесь $T_+=\dfrac{d^2}{dt^2}+c(x,0)$ – дифференциальный оператор, $\tau(x)=\tau_1^+(x)$, $\nu(x)=\nu_1^+(x)$.

Введем новые неизвестные функции:

$$\Im(x)=\tau(x)-(\tau_1-\tau_0)x-\tau_0,$$

$$V(x)=\nu(x)-c_0(x,0)\left[(\tau_1-\tau_0)x+\tau_0\right],$$

где $\tau_0=\psi_2(0)$, $\tau(1)=\psi_1(0)$.

С учетом введенных обозначений и принимая во внимание (7), будем иметь:

$$T_+\Im(x)=V(x),\quad \Im(0)=\Im(1)=0. \tag{8}$$

Пусть $G(x,t)$ – функция Грина оператора T_+ с областью определения $D(T_+)=\left\{\Im(x)\in C^2(J_1)\bigcap C(\bar{J}_1),\ \Im(0)=\Im(1)=0\right\}$.

Тогда, решение задачи (8), можно записать в виде

$$\Im(x)=\int_0^1 G(x,t)V(t)\,dt. \tag{9}$$

Соотношение (9) совместно с ранее полученным равенством (6) и условиями (5) образует систему интегро-функциональных уравнений для неизвестных функций $\tau^{\pm}(x)$ и $\nu^{\pm}(x)$. Разрешая ее относительно $\nu^-(x)$, получим:

$$\nu^-(x)+\int_0^1 K(x,t)\nu^-(t)\,dt=F(x), \tag{10}$$

где

$$K(x,t)=\begin{cases}K_1(x,t)+K_2(x,t),\ 0\le t\le x,\\ K_2(x,t),\ x<t\le 1,\end{cases}$$

$$K_1(x,t)=\frac{\alpha(x)J_0\left[|\lambda|(x-t)\right]}{\beta(x)},\quad K_2(x,t)=-\frac{1}{\beta(x)}\int_t^1 G(x,z)\delta(z)\,dz,$$

$$F(x)=\frac{1}{\beta(x)}\left[\int_0^1 G(x,t)\delta(t)\sigma(t)\,dt+F_0(x)-\alpha(x)p(x)-\gamma(x)\right],$$

$$F_0=\left(\psi_1(0)-\psi_2(0)\right)x+\psi_2(0)-\int_0^1 G(x,t)c_0(t,0)\left[\left(\psi_1(0)-\psi_2(0)\right)t+\psi_2(0)\right]dt.$$

Таким образом, вопрос разрешимости задачи N был эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода (10), разрешимость которого очевидна. Определив функцию $\nu^-(x)$, решение задачи N может быть найдено как решение соответствующей задачи Коши в области Ω_1 и первой краевой задачи в области Ω_0, для уравнения (1).

Единственность решения задачи N устанавливается методом интегралов энергии [5].

Литература

1. Лесев В.Н. Краевая задача для гиперболо-эллиптического уравнений второго порядка с перпендикулярными линиями вырождения // Вестник Кабардино-Балкарского государственного университета. Серия математические науки, 2003. – С. 55-57.
2. Елеев В.А., Лесев В.Н. Задачи со смещением для вырождающихся гиперболических и смешанных уравнений. Конспект лекций. – Нальчик: Каб.-Балк. ун-т, 2003. – 109 с.
3. Сабитов К.Б. Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. I // Дифференц. уравнения, 1990. Т. 26, №6. – С. 1023-1032.

4. Сабитов К.Б. Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. II // Дифференц. уравнения, 1992. Т. 28, №7. – С. 1138-1145.
5. Елеев В.А., Лесев В.Н. Краевая задача для уравнения смешанного гиперболо-параболо-эллиптического типа // Вестник Кабардино-Балкарского государственного университета. Серия математические науки, 2004. – С. 43-45.