СОВМЕСТНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОБРАТНОГО ИТЕРИРОВАНИЯ И ГАРАНТИРОВАННОГО ОЦЕНИВАНИЯ В ЗАДАЧЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ОДНОМЕРНОГО ХАОТИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

THE COMBINED USE OF THE METHOD OF INVERSE ITERATION AND GUARANTEED ESTIMATION IN PROBLEMS OF PARAMETRIC IDENTIFICATION DIMENSIONAL CHAOTIC MAPS

D. Semenov

The article is devoted to the research of the ambiguity problem of an inverse function which occurs in solving a parameter identification problem of the one-dimensional chaotic map by the backward iteration method. The ambiguity problem can be solved through joint use of the backward iteration method and the guaranteed method. The effectiveness of joint use of methods was verified by the experimental results.

Keywords: backward iteration, guaranteed method, parameter identification, chaotic map.

Семенов Данила Михайлович
Студент каф. систем управления,
Южно-Уральский государственный университет

Аннотация
Исследуется проблема неоднозначности обратной функции, которая возникает при идентификации параметров одномерного хаотического отображения методом обратного итерирования. Решить проблему удается путем совместного использования методов обратного итерирования и гарантированного оценивания. Эффективность совместного применения методов подтверждается результатами эксперимента.

Ключевые слова:
Обратное итерирование, гарантированный метод, идентификация параметров, хаотическое отображение.

Введение

Процедура параметрической идентификации нелинейных динамических систем по измерениям – необходимый этап восстановления математической модели наблюдаемого процесса и его прогнозирования [1–2].

Особое внимание, в последние годы, уделяется идентификации параметров одномерных хаотических отображений [3–5]. Причиной такого внимания является то, что несмотря на одномерность таких отображений, они позволяют описывать сложное поведение многих реальных процессов [4, 6].

На сегодняшний день существует ряд проблем, связанных с задачей идентификации параметров одномерных хаотических отображений. Одной из таких проблем является многоэкстремальность целевой функции, которая возникает при решении задачи методом наименьших квадратов [7]. Большое количество исследований посвящено решению данной проблемы, при этом широкое распространение получили алгоритмы эллипсоидального и гарантированного оценивания [5, 8, 9].

Использование алгоритмов эллипсоидального и гарантированного оценивания позволяет значительно уменьшить область определения целевой функции и сократить число локальных экстремумов. Тем не менее, исключить все локальные экстремумы, в большинстве случаев, не удается.

Другим перспективным методом решения проблемы многоэкстремальности является итерирование хаотического отображения в обратном времени [4].

Однако по причине неоднозначности обратной функции для одномерного хаотического отображения, встает вопрос о выборе одного из полученных решений [4].

В настоящей работе предлагается способ совместного использования методов обратного итерирования и гарантированного оценивания, который позволяет частично исключить неоднозначность обратной функции для одного из одномерных хаотических отображений и получить адекватную оценку параметров модели, которая описывает исходный процесс.

1. Постановка задачи

Объектом исследования является процесс, который описывается одномерным хаотическим отображением:

$$x_{k+1} = f\left(x_k, \lambda\right), \tag{1}$$

где

$x_k \in X$ – переменная состояния;

$\lambda \in \Lambda$ – параметр отображения.

Далее в работе под хаотическим отображением (1) будем понимать логистическое отображение [6]:

$$x_{k+1} = \lambda x_k \left(1 - x_k\right),\ x_k \in [0,1],\ \lambda \in [3.57, 4]. \tag{2}$$

Реализация исследуемого процесса представлена последовательностью измерений:

$$y_k = x_k + v_k, \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{3}$$

где

v_k – ошибки измерений. Априорная информация о реализации ошибок измерений v_k представлена в виде множественных оценок V_k.

Решение задачи параметрической идентификации предполагает получение оценок $\tilde{x}_k \in X$ и $\tilde{\lambda} \in \Lambda$, которые позволяют получить адекватную модель исследуемого процесса.

2. Метод гарантированного оценивания

В работе [5] представлен метод гарантированного оценивания, идея которого основана на минимаксном подходе [10] и является его обобщением на случай одномерных хаотических отображений. Кроме измерений y_k, алгоритм предлагаемого метода требует наличия априорной информации о начальном значении переменной состояния x_0, параметре λ и ошибках измерений v_k, которая задается в виде множеств X_0, Λ_0 и V_k соответственно [5]. Результатом работы алгоритма являются множественные оценки (информационные множества) X_k и Λ_k.

Алгоритм гарантированного оценивания можно разделить на этап прогнозирования и этап корректировки. На этапе прогнозирования происходит построение множества прогнозов $X_{k/k-1}$ на основе множеств X_{k-1} и Λ_{k-1}:

$$X_{k/k-1} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_{k-1}} S\left(X_{k-1}, \lambda\right), \tag{4}$$

где $S\left(X_{k-1}, \lambda\right) = \left\{x \middle| x = f(s, \lambda), \quad s \in X_{k-1}\right\}$

– множество прогнозов, которое построено для конкретного значения λ. Затем следует этап корректировки, на первом шаге которого строится множество совместное с измерениями Y_k:

$$Y_k = \left\{x \middle| x = y_k - v, \quad v \in V_k\right\}. \tag{5}$$

Далее происходит построение информационных множеств X_k и Λ_k:

$$X_k = X_{k/k-1} \cap Y_k, \tag{6}$$

$$\Lambda_k = \left\{\lambda \in \Lambda_{k-1} \middle| S\left(X_{k-1}, \lambda\right) \cap X_k \neq \varnothing\right\}. \tag{7}$$

Полученные множества X_k и Λ_k гарантированно содержат истинные значения переменной состояния x_k и параметра λ.

3. Метод обратного итерирования

Классическим подходом в идентификации параметров математической модели исследуемого процесса, по конечному числу измерений, является метод наименьших квадратов (МНК) [7]. Если математическая модель – одномерное хаотическое отображение, то задачу МНК можно сформулировать следующим образом:

$$\min_{x_0 \in X, \lambda \in \Lambda} F\left(x_0, \lambda\right) = \sum_{k=1}^{N} \left(y_k - f^{(k)}\left(x_0, \lambda\right)\right)^2, \tag{8}$$

где $f^{(k)}$ - k–я итерация отображения; x_0 – начальное значение переменной состояния; λ – параметр отображения.

В ходе решения задачи (8) возникает проблема многоэкстремальности целевой функции (**рис. 1а**), причиной которой является чувствительность хаотических отображений к малым изменениям начальных условий [5].

Проблему многоэкстремальности возможно разрешить (**рис. 1б**), если использовать МНК совместно с итерированием хаотического отображения в обратном времени [4]:

$$\min_{x_N \in X, \lambda \in \Lambda} F\left(x_N, \lambda\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(y_{N-k} - f^{(-k)}\left(x_N, \lambda\right)\right)^2, \tag{9}$$

где $f^{(k)}$ - k–я итерация отображения в обратном времени; x_N – значение переменной состояния в N–ый момент времени; λ – параметр отображения. Но данный подход имеет существенный недостаток, вызванный неоднозначностью обратной функции для хаотических отображений. Причем, некорректный выбор одного из возможных решений может значительно ухудшить результаты оценивания [4].

4. Совместное применение методов

Проблему неоднозначности обратной функции для хаотического отображения (2) удается преодолеть путем введения дополнительного параметра u_k, значение которого решает вопрос о выборе одного из возможных решений. Далее параметр u_k будем называть управляющим параметром. При этом общий вид обратного отображения с учетом параметра u_k можно записать следующим образом:

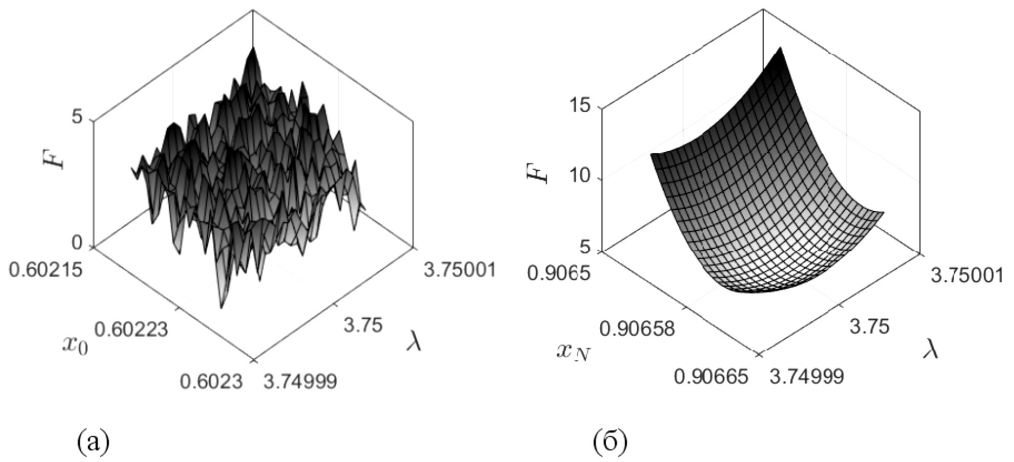

Рисунок 1. Целевые функции в прямом (а) и обратном (б) времени для идентификации параметров модели хаотического процесса (2) с начальными условиями x_0=0.6, λ=3.75 (число измерений *N*=50)

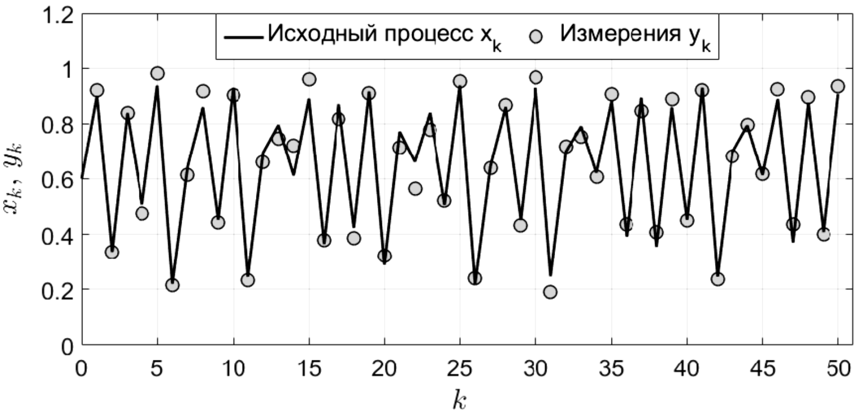

Рисунок 2. Исходный процесс x_k и измерения y_k .

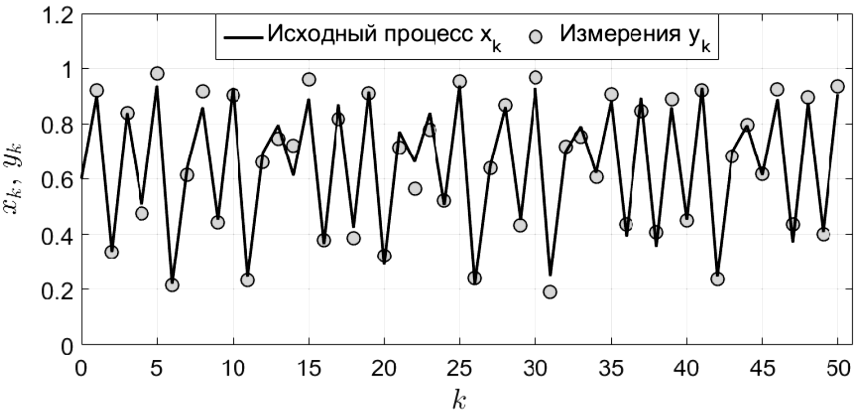

Рисунок 3. Ошибки измерений v_k и границы множеств V_k .

$$x_k = f^{-1}\left(\mathrm{x}_{k+1}, u_k\right), \qquad (10)$$

где $x_k+1=(x_k+1, \lambda)$ – расширенный вектор состояния; u_k – управляющий параметр.

Формирование последовательностей параметров u_kпроисходит на основе информационных множеств x_k и свойств отображения (2), для которого обратное отображение можно представить в неявном виде:

$$x_{k+1} - \lambda x_k\left(1 - x_k\right) = 0, \qquad (11)$$

где x_k+1 – значение переменной состояния, полученное на (k+1)–ом шаге.

Отметим, что корни уравнения (11) симметричны друг другу относительно прямой $x_k=1/2$. Основываясь на данном факте, проведем классификацию множеств x_k . Пусть $\bar{x}_k = \max X_k$ и $\underline{x}_k = \min X_k$,

тогда классом левых множеств будем называть множества x_k, для которых $\bar{x}_k \le 1/2$

Аналогично классом правых множеств будем называть все множества x_k, для которых неравенство $\underline{x}_k \ge 1/2$

является верным. Также имеет место случай, когда множество x_k принадлежит обоим классам $\left(\underline{x}_k \le 1/2 \le \bar{x}_k\right)$,

но на практике такая ситуация возникает достаточно редко. В соответствии с приведенной выше классификацией введем функцию классификации (12).

$$f\left(X_k\right) = \begin{cases} \{0\}, & \bar{x}_k \le 1/2; \\ \{1\}, & \underline{x}_k \ge 1/2; \\ \{0,1\}, & \underline{x}_k \le 1/2 \le \bar{x}_k. \end{cases} \qquad (12)$$

Пусть $A_k=f(x_k)$, тогда на основе множеств A_k построим множество управляющих последовательностей:

$$U = \left\{\left(u_1, \ldots, u_N\right) \middle| u_1 \in A_1, \ldots, u_N \in A_N\right\}. \qquad (13)$$

Мощность множества U равна 2^n, где n – число множеств A_k, мощность которых равна 2. Далее выбрав все элементы из множества U, без повторений, получим конечный набор последовательностей управляющих параметров (управляющих последовательностей)

$$\mathrm{u}^j = \left(u_1^j, \ldots, u_N^j\right), \qquad j = \overline{1, 2^n}.$$

После формирования управляющих последовательностей u_i, определим функции, обратные хаотическому отображению (2):

$$f_j^{-1}\left(\mathrm{x}_{k+1}, u_k^j\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\lambda}\sqrt{\lambda^2 - 4\lambda x_{k+1}}, \ u_k^j = 1; \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\lambda}\sqrt{\lambda^2 - 4\lambda x_{k+1}}, \ u_k^j = 0, \end{cases} \qquad (14)$$

где u_k^j – k–ый управляющий параметр последовательности u^j. Опустив аргумент u_k^j каждую из функций (14) запишем в виде отображения:

$$x_k = f_j^{-1}\left(x_{k+1}, \lambda\right), \qquad (15)$$

где j – номер управляющей последовательности u^j.

Далее, используя взвешенный МНК, решим задачу параметрической идентификации для каждого из полученных отображений (15):

$$\min_{x_N \in X_N, \lambda \in \Lambda} F_j\left(x_N, \lambda\right) = \sum_{k=0}^{N-1} W_{N-k}\left(\hat{x}_{N-k} - f_j^{(-k)}\left(x_N, \lambda\right)\right)^2, \qquad (16)$$

где

X_N и Λ – информационные множества;

$W_k = \left(\bar{x}_k - \underline{x}_k\right)^{-2}$ – весовой коэффициент;

$\hat{x}_k$ – центр множества X_k.

Решив конечное число задач (16), необходимо выбрать решение одной из них, которое максимально точно описывает исходный процесс. Предполагается, что такое решение можно найти следующим способом:

$$\left(x_N^*, \lambda^*\right) = \arg \quad \min\left(F_1, \ldots, F_d\right), \qquad d = 2^n. \qquad (17)$$

В завершении, следует отметить, что последовательность uj, которая соответствует решению $\left(x_N^*, \lambda^*\right)$ может использоваться в дальнейшем при поступлении новых измерений.

5. Численный эксперимент

Рассмотрим возможность совместного применения методов обратного итерирования и гарантированного оценивания на практике. В качестве исследуемого процесса примем модельный процесс, порожденный отображением (2) с начальными условиями $x_0=0.6$, $\lambda=3.75$ и $N=50$ (**рис. 2**).

Информация о исследуемом процессе доступна в виде конечного числа измерений . $y_k, k = \overline{1, N}$

Реализация ошибок $v_k, k = \overline{1, N}$ в измерениях $y_k, k = \overline{1, N}$ представляет собой белый гауссовский шум (**рис. 3**) с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением $\delta=0.04$ (отношение сигнал/шум составило 15 дБ).

В ходе предварительной обработки измерений $y_k, k = \overline{1, N}$ алгоритмом гарантированного оценивания, были получены множественные оценки переменной состояния x_N и параметра λ:

$$X_N=[0.90653;0.90661];$$
$$\Lambda=[3.74999;\ 3.75001].$$

Поиск точечных оценок значений X_N и λ был организован в соответствии с предложенным в работе способом совместного использования методов обратного итерирования и гарантированного оценивания.

В результате поиска получены следующие точечные оценки x_N и λ:

$$x_N=0.90662;\ \lambda=3.7499998.$$

Абсолютные погрешности оценивания переменной состояния x_N и параметра λ соответствуют значениям 2*10-5 и 2*10-7.

Заключение

Решена проблема неоднозначности обратной функции, которая возникает при параметрической идентификации одномерного хаотического отображения (2) методом обратного итерирования. Предложенный в работе способ решения проблемы основан на использовании метода обратного итерирования совместно с методом гарантированного оценивания. Благодаря совместному использованию методов, неоднозначная функция, обратная хаотическому отображению (2), может быть представлена в виде конечного числа однозначных функций (причем число таких функций оказывается достаточно мало при условии малого числа измерений). В результате чего, получив решения задач параметрической идентификации для всех однозначных функции, удается выбрать одно из решений, которое максимально точно описывает исходный процесс. Необходимо также отметить, что полученное решение является точечной оценкой x_N и λ:, которую часто не удается получить, используя только гарантированный метод.

Результаты проведенного эксперимента подтверждают эффективность совместного использования методов обратного итерирования и гарантированного оценивания в решении задачи идентификации параметров одномерного хаотического отображения (2). Полученные в результате идентификации оценки x_N и λ: имеют приемлемую точность и позволяют адекватно восстановить исходную модель хаотического процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожихова Н.А., Ширяев В.И. Прогнозирование временного ряда с учетом хаотической компоненты // Вестник ЮУрГУ. Серия "Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника". 2010. №22. С. 22–25.

2. Смирнов Д.А. Реконструкция уравнений динамики и диагностика взаимодействия нелинейных колебательных систем по временным рядам: автореф. дис. ... д-р. физ.-мат. наук: 01.04.03. Саратов, 2010. 34 с.

3. Семенов Д.М., Малютина Е.И., Ширяев В.И. Применение ансцентного фильтра Калмана для фильтрации временных рядов с хаотической компонентой // Тезисы 13-ой международной конференции "Авиация и космонавтика–2014". М.: МАИ, 2014. С. 429–431.

4. Смирнов Д.А., Вваскин В.С., Пономаренко В.И. Метод оценки параметров одномерных отображений по хаотическим временным рядам // Письма в ЖТФ. 2005. №3. С. 18–26.

5. Шелудько А.С., Ширяев В.И. Алгоритм гарантированного оценивания параметра одномерного хаотического отображения // Информационные технологии. 2015. №1. С. 30–34.

6. Шустер Г.Г. Детерминированный хаос: Введение. М: Мир, 1988. 240 с.

7. Елсаков С.М., Ширяев В.И. О многоэкстремальности в задачах оценивания систем детерминированного хаоса // Серия "Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника". 2009. №3. С. 37–41.

8. Кунцевич В.М., Волосов В.В. Эллипсоидальные и интервальные оценки вектора состояния линейных и нелинейных дискретных динамических систем // Кибернетика и системный анализ. 2015. №1. С. 73–84.

9. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М: Наука, 1988. 319с.

10. Кац И.Я. Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределенных ситуациях // Автоматика и телемеханика. 1978. №11. С. 79–87.