

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СОДЕРЖАНИЯ ОБУЧЕНИЯ СИСТЕМАМ КООРДИНАТ И КОМПЛЕКСНЫМ ЧИСЛАМ В МАТЕМАТИКЕ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

Фокин Роман Романович

доктор педагогических наук, доцент, Федеральное
Государственное Бюджетное Военное Образовательное
Учреждение Высшего Образования «Военно-космическая
академия имени А.Ф. Можайского», (г. Санкт-Петербург)
vka@mil.ru

SOME METHODOLOGICAL TRANSFORMATIONS OF THE CONTENT OF TEACHING COORDINATE SYSTEMS AND COMPLEX NUMBERS IN HIGHER SCHOOL MATHEMATICS

R. Fokin

Summary: The article introduces the concept of "methodological transformation of the teaching content" into pedagogical science. This means transforming the learning content with methodological goals. The overall goal is to improve the quality of education. In particular, the goals are to increase the degree of friendliness of the learning content in relation to the learner, to facilitate the understanding and assimilation of the learning material by the learners. The general pedagogical principles of applying methodological transformations of the teaching content in universities are proposed for discussion. The article presents as examples a system of methodological transformations of the teaching content on the topics of "Coordinate systems" and "Complex numbers" in the context of teaching mathematics in higher education. In universities, these topics are usually traditionally studied in the mathematical courses "Higher Mathematics" and "Analytical Geometry and Linear Algebra", however, it should be noted that the topic "Complex numbers" rather refers to the discipline "General Algebra". The study of these two topics in the secondary school mathematics course is also discussed.

Keywords: students, learning, hemispheric brain asymmetry, analytical geometry, algebra, historicism, philosophy, coordinate systems, complex numbers.

Аннотация: Статья вводит в педагогическую науку понятие «методическое преобразование содержания обучения». Это означает преобразование содержания обучения, имеющее методические цели. Общая цель при этом – повышение качества обучения. В частности, имеются в виду цели повышения степени дружелюбности содержания обучения по отношению к обучаемому, облегчение понимания и усвоения обучаемым учебного материала. Предлагаются к обсуждению общие педагогические принципы применения методических преобразований содержания обучения именно в вузах. Статья представляет в качестве примеров систему методических преобразований содержания обучения темам «Системы координат» и «Комплексные числа» в условиях обучения математике в высшей школе. В вузах обычно эти темы традиционно изучаются в рамках математических курсов «Высшая математика» и «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», однако следует заметить, что тема «Комплексные числа» скорее относится к дисциплине «Общая алгебра». Также обсуждается изучение этих двух тем в курсе математики средней школы.

Ключевые слова: студенты, обучение, межполушарная асимметрия мозга, аналитическая геометрия, алгебра, историзм, философия, системы координат, комплексные числа.

Введение в проблематику исследования

Актуальность данной статьи следует из того, что, во-первых, если речь идет о такой сложной для обучаемых области знаний, как математика, то целесообразно непосредственное научное содержание математики преобразовать в содержание обучения математике и далее его совершенствовать на основании педагогического опыта, и, во-вторых, по мнению автора, существуют методические преобразования содержания обучения (МПСО) системам координат (СК) и комплексным числам (КЧ) в математике высшей школы, которые могут поднять качество обучения математике.

Цели исследования:

1. Обосновать необходимость применения понятия МПСО в педагогике.

2. Обсудить некоторые МПСО, касающиеся СК и КЧ.

Эти цели достигаются решением следующих задач:

1. Обосновать применение понятия МПСО в педагогике.
2. Предложить некоторые МПСО по тематике СК.
3. Предложить некоторые МПСО по тематике КЧ.

1. О применении понятия МПСО в педагогике

Бытует мнение [1], что, в младшей и средней школах изучается адаптированная наука, а в высшей школе – наука непосредственно. Между тем, популярные в течение десятилетий учебные пособия для вузов [2, 3] кладут в основу математической теории пределов понятия постоянных и переменных величин (следовательно, есть вре-

мя, и понятия эти не математические, а физические), про строго математическое понятие отображения (из которого теория пределов и проистекает) при этом нет ни слова.

«Определение 2.2. Упорядоченную тройку некомпланарных векторов **a**, **b**, **c** называют правой, если направление вектора **a** совмещается с направлением вектора **b** при помощи кратчайшего поворота вектора **a** в плоскости этих векторов, который со стороны вектора **c** совершается против хода часовой стрелки» [4, С. 56] – это снова не математические, а физические рассуждения, они допустимы как наглядные комментарии, но не как строгое математическое определение.

$$\det \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

Автор при проведении соответствующих лекций определял ориентацию тройки некомпланарных векторов так:

1. начальный ортонормированный базис **i**, **j**, **k** – правый;
2. если определитель (1) больше 0, то тройка **a**, **b**, **c** – правая, если определитель (1) меньше 0, то тройка **a**, **b**, **c** – левая.

Замечание: если определитель (1) равен 0, то вектора **a**, **b**, **c** – компланарны.

Согласно результатам многократного психологического тестирования, автор является почти полностью левополушарным. На непрерывной шкале [-1; +1] (где -1 означает полностью левополушарный, а +1 – полностью правополушарный) его показатель около -0.95. Он помнит, как будучи студентом, испытывал муки недопонимания подобных нематематических рассуждений на лекциях по математике. Небезосновательно можно предположить, что подобные муки характерны именно для левополушарных студентов. Психолого-педагогические исследования [5, 6] показывают, что в настоящее время даже среди студентов физико-математических, естественно-научных, технических направлений доля правополушарных более 2/3, а в 1960 годы эта доля была менее 1/3. Упомянутый выше показатель асимметрии мозга автора равен -0.95 – это нормированная разность «мощностей» левого и правого полушарий (автор – левополушарный). Если бы он был +0.95, то автор был бы правополушарным. Если бы он по абсолютной величине был менее 0.1, то – гармоничным. Автору не попадались в научной литературе измерения ненормированных «мощностей» левого и правого полушарий. Каждую из этих «мощностей» можно было бы оценивать как высокую, среднюю, низкую, а испытуемые могли бы подразделяться тем самым на 9 типов. Такая психолого-математическая мо-

дель была бы сложнее, но интереснее.

Описанные выше нематематические фрагменты очень редки в вузовских учебниках математики, написанных десятки лет назад, но они свидетельствуют о сознательных МПСО вузовской математике. МПСО математике в младшей и средней школах бесспорно необходимо и всегда реально производилось авторами учебников и педагогами при обучении математике. Следовательно, понятие МПСО реально работало, несмотря на его формальное отсутствие, что и является обоснованием его формального введения в педагогическую науку для проведения дальнейших исследований в этом направлении.

О принципах реализации МПСО. Если содержание обучения для правополушарных (которых более 2/3) и левополушарных было бы различным, то это способствовало бы улучшению понимания математики. В принципе можно было бы формировать правополушарные и левополушарные учебные группы. Формировать группы по 9 типам было бы невозможным, но можно бы обеспечить электронное обучение по 9 типам. А что делать, если в учебной группе традиционного обучения есть студенты различных типов? Профессор, д-р физ.-мат. наук Пичугин Ю.А., на основе многолетнего опыта преподавания математики студентам гуманитарных направлений [7] заметил, что для них характерны высокие результаты и сильная мотивация к реальному изучению оснований математики. Вероятно, из-за преобладания при этом философской и исторической направленности учебного курса. Так же точно могут быть представлены теория пределов, системы координат, комплексные числа и многое другое.

Такая направленность не вызовет проблем и для левополушарных студентов, если выходы изложения учебного материала за рамки парадигмы математики будут объявляться комментариями и не будут называться определениями, теоремами... Реализация такого подхода для реального педагога очень сложна. Педагог должен быть нетривиально мыслящей личностью, способной параллельно моделировать процессы понимания и для право, и для левополушарного студента. Преподаватель математики почтенного возраста – это в прошлом левополушарный студент чаще всего, причем он обычно совсем не знает психологии. Его главный метод мотивации студента – постановка низких оценок, что обычно не дает положительных результатов.

Такая параллельная работа в двух плоскостях (для право и левополушарных студентов, а для 9 типов такое реально не возможно) для достижения успешности неизбежно потребует сокращения темпа обучения. Думается, это сыграет положительную роль в понимании математики студентами. Сейчас она почти нулевая. Автор многократно задавал весной студентам 2 курса (заканчивающим обучение математике в вузе) вопрос: «Урав-

нение $x^2 - 2x - 1 = 0$ является дифференциальным?» Общее мнение учебной группы было: «Да, является!» Почти все студенты умеют вычислять пределы, но не знают, что такое предел, умеют совершать действия над комплексными числами, но не знают, что такое комплексное число... Имеются навыки работы с математическими методами на уровне условных рефлексов, но понимания их сущности нет почти ни у кого.

Когда автор учился в 7–8 классах средней школы Ленинграда в 1969–1971, высшая математика там не преподавалась. Однако содержание обучения было столь сложным (не только по математике), что адекватно понимали учебный материал единицы из более, чем сотни учеников. Возможно, советская школа была первой в мире по количеству учебного материала, но, чтобы по его пониманию обучаемыми – сомнительно. «Хорошисты» и «отличники» обычно имели навыки на уровне условных рефлексов.

К сожалению, в последние 2–3 десятка лет наблюдается тенденция перенесения содержания вузовского математического обучения без адекватного преобразования в среднюю школу (и даже в младшую). Количество математического учебного материала и темп его подачи преподавателем возрос. А уровень понимания обучаемыми стал «бесконечно малой 2 порядка». У большинства современных школьников и студентов за 10–13 лет обучения воспитан стойкий «комплекс неполноценности» к пониманию математики.

2. О некоторых МПСО по тематике СК

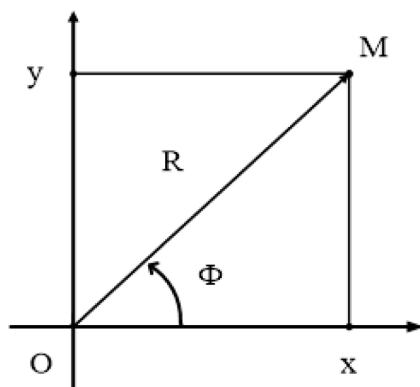


Рис. 1. Декартова СК и полярная СК
Источник: Составлено автором на основании [8]

Декартову СК (рис. 1) с ортогональными осями x, y , автор изучал, начиная с 6 класса средней школы. На уроках алгебры для построения графиков линейной функции $y = kx + b$, параболы $y = ax^2 + bx + c$, гиперболы $y = a/(x-b) + c$, где $a \neq 0$. На уроках физики для изучения зависимостей между физическими величинами. На уроках геометрии СК не было, а преподавался классический аксиоматический метод Эвклида, где доказательство теорем учит логически рассуждать. Кто геометрию Эвклида (ГЭ) в школе

освоил, тому в вузе очевидно, что аналитическая геометрия (АГ, которую придумал [9] Декарт) – это совсем другая теория. Между ними можно и нужно проводить ассоциативно-наглядные параллели, но выдавать их за математические доказательства некорректно. Именно думавший студент таких «доказательств» не поймет из-за нормально работающего мозга.

АГ обычно изучается на 1 курсе вуза, она начинается с изучения различных СК. Если не требовать (как для Декартовой СК) попарной ортогональности осей координат (x, y) – для 2-мерной плоскости, (x, y, z) – для 3-мерного пространства, то получается афинная СК. Любая точка M тогда задается ее координатами как кортеж чисел – соответственно, как их упорядоченная пара (x, y) или как их упорядоченная тройка (x, y, z) .

На плоскости также изучается (рис. 1) полярная СК, где O – ее начальная точка, Ox – ее полярный луч. В ней (R, Φ) – координаты точки M , где R – полярный радиус, Φ – полярный угол. На рис. 1 Декартова СК и полярная СК согласованы. Это означает, что совпадают их начальные точки, совпадают направления оси x и полярного луча, угол Φ отсчитывается от оси x к оси y .

Очевидно, $\Phi + 2\pi k$ – тоже полярный угол точки M при любом целом k , а если у точки M координата $R=0$, то Φ может быть любым числом. Следует обратить внимание студентов, что из-за такой своей неоднозначности полярная СК хуже Декартовой СК. Назовем главным значением полярного угла то, что принадлежит $[0; 2\pi)$ далее под Φ будем подразумевать именно его. Теперь полярная СК стала почти однозначной (для точек $M \neq O$).

$$x = R \cos \Phi; y = R \sin \Phi \quad (2)$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3)$$

$$\Psi = \arccos(x/R) \quad (4)$$

$$y \geq 0 \Rightarrow \Phi = \Psi; y < 0 \Rightarrow \Phi = 2\pi - \Psi \quad (5)$$

Группа формул (2) приводится во многих учебных пособиях, с ее помощью координаты (R, Φ) пересчитываются в (x, y) . Автор не видел учебных пособий, где бы приводился явный алгоритм обратного пересчета. Вот он: По формуле (3) вычисляется R . Если $R=0$, то годится любое $\Phi \in [0; 2\pi)$. Если $R \neq 0$, то по формуле (4) вычисляется промежуточная величина Ψ , очевидно, что $\Psi \in [0; \pi]$. Затем по группе формул (5) вычисляется Φ .

$$\{(x, y) \mid y = 2x + 3 \text{ \& } x \in [0; 1]\} \quad (6)$$

$$\{(x, y) \mid y = x^2\} \quad (7)$$

АГ рассматривает геометрическую фигуру как некоторое множество точек. Под точкой подразумевается

кортеж чисел, например, (x, y) . Пусть для простоты имеется в виду АГ на плоскости. Множество (6) – это отрезок прямой, а множество (7) – парабола. Студенты должны понимать, что АГ рассматривает только кортежи чисел и алгебраические соотношения. Рисунки в АГ несут лишь ассоциативно-наглядную функцию. АГ не рассматривает рис. 1 как определение полярной СК, ее определением являются методы преобразования (x, y) в (R, Φ) .

Внутри ГЭ [10, 11] теорема доказывается путем логических выводов из аксиом и ранее доказанных теорем. Попутно вводятся определения новых понятий, которые теоретически можно считать новыми аксиомами. Здесь геометрические фигуры – это некоторые из этих понятий, а вовсе не множества точек. Понятия «точка», «прямая», «квадрат» – это фигуры, а понятие «параллельность» – это не фигура. В ГЭ не может быть понятий «парабола», «гипербола» ... Их нет в составе ни аксиом, ни определений. Рисунки в ГЭ также несут лишь ассоциативно-наглядную функцию.

$$A \otimes B = \{(a, b) \mid a \in A \ \& \ b \in B\} \quad (8)$$

Автор на первой лекции по СК вводит скобки $\{ \}$ и $()$ как средства для описания, соответственно, множеств и кортежей, а затем – Декартово произведение множеств на примере: $\{\text{Иван, Петр}\} \otimes \{\text{Елена, Марина}\} = \{(\text{Иван, Елена}), (\text{Петр, Марина}), (\text{Иван, Марина}), (\text{Петр, Елена})\}$, строгое определение дает формула (8). Далее: пусть $\mathbf{R}$ – множество действительных чисел. Пусть $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \otimes \mathbf{R}$. Пусть $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^2 \otimes \mathbf{R}$. Пусть $\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \otimes \mathbf{R}$. Классическая АГ имеет дело только с $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$.

Вероятно, предложенное выше изложение учебного материала, по сути, и обеспечивает философскую направленность учебного курса. Исторически математика возникла как философия некоторого направления. Потому она и применима почти ко всему. Для обеспечения философско-исторического направления при обучении АГ также следует рассказать и о Ренэ Декарте как об исторической личности. Потомственный французский дворянин. Храбрый офицер, принимавший участие во многих сражениях. Знаменитый философ-дуалист, рационалист, именно математика была ядром его философской концепции. Физик, инженер, а также и биолог.

3. О некоторых МПСО по тематике КЧ

Автор в средней школе КЧ не изучал, хотя в 9–10 классах обучался в Ленинградской физико-математической школе № 30. Где используются КЧ? Главным образом при расчетах электрических схем переменного тока. В программе школьной физики таких расчетов тогда не было. Были лишь расчеты схем постоянного тока. Без изучения декартовой СК на уроках алгебры на уроках физики в средней школе изучать было бы почти нечего. А

КЧ в программе средней школы зачем нужны? Не понятно. Как и пределы, производные, Римановы интегралы, обыкновенные дифференциальные уравнения... В вузах затем это все изучается повторно.

Определяя КЧ, чаще всего говорят: « i – это такое число, что $i^2 = -1$ и $(-i)^2 = -1$ тоже.» А до этого обучаемым годами повторяли: «Квадрат любого числа не может быть отрицательным!» Реже i вводят так: «Рассмотрим уравнение $z^2 + 1 = 0$, оно имеет 2 корня: i и $-i$.» А как отличить «близнецов»? Нет ответа! Заметим, что $D = -1$. «Если дискриминант отрицательный, то корней нет!» – тоже годами повторяли. Объяснение: «Это все было про действительные числа, а КЧ – это другие числа!» А потом выясняется: «Всякое действительное число является также и комплексным.» Трудно понять математику!

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (9)$$

Автор вводит КЧ так: КЧ – это кортеж из двух действительных чисел. Такова сущность КЧ. Смотрим рис. 1: $M = (x, y)$, M – это КЧ. Группа формул (9) определяет для КЧ операции сложения $(+)$ и умножения $(\cdot)$ или пустое место) соответственно. Обозначим кортеж $(0, 1)$ буквой i . Примем соглашение: В контексте рассуждений о КЧ кортеж вида $(a, 0)$ будем записывать как a . $\mathbf{C}$ – это множество КЧ. «Чем $\mathbf{C}$ отличается от $\mathbf{R}^2$?» – может спросить студент. Определения (9) сложения и умножения над КЧ делают $\mathbf{R}^2$ особой математической структурой. $\mathbf{R}^2$ – это заготовка, полуфабрикат для $\mathbf{C}$.

$$M = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + (y, 0) \quad (0, 1) = x + yi \quad (10)$$

$$M = (R \cos \Phi) + (R \sin \Phi) i = R (\cos \Phi + i \sin \Phi) \quad (11)$$

Преобразования (10) дают алгебраическую форму записи КЧ, (10) и (2) дают (11) с тригонометрической формой записи КЧ. В контексте КЧ (на комплексной плоскости, рис. 1) полярный радиус R называется модулем M или $|M|$, а полярный угол Φ – аргументом M или $\arg M$. Ранее было известно, например, что $|-5| = 5$, а (3) дает $|(-5, 0)| = 5$. Старое и новое понятия модуля числа согласуются.

$$e^{iw} = \cos w + i \sin w \quad \forall \text{ (для любого) } w \in \mathbf{R} \quad (12)$$

Необходимость МПСО, связанного с формулой Эйлера (12) обосновывается в статье [12]. Там же представлено конкретное такое преобразование.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \text{ где } x, a_n, \dots, a_0 \in \mathbf{C}, a_n \neq 0, n \geq 1 \quad (13)$$

Уравнение (13) относительно x называют алгебраическим уравнением степени n в КЧ. Из основной теоремы алгебры (принадлежит К. Ф. Гауссу) следует, что алгебраическое уравнение степени n в КЧ имеет ровно n корней с учетом их кратности. Например, уравнение $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$ имеет корень $x=1$ кратности 2.

$$x_1 = f_1^{(n)}(a_n, \dots, a_0) \quad (14)$$

$$x_n = f_n^{(n)}(a_n, \dots, a_0)$$

Очевидно существование функций $f(n)_1, \dots, f(n)_n$ из (14), которые эти корни представляют для алгебраического уравнения степени n . Известны общие формулы вычисления всех корней: при $n=1$ (решение линейного уравнения), при $n=2$ (решение квадратного уравнения), при $n=3$ (метод Д. Кардано, авторы - Сципион дель Ферро и Н. Тарталья), при $n=4$ (метод Л. Феррари, он же автор). По теореме Руффини-Абеля при $n \geq 5$ функции $f(n)_1, \dots, f(n)_n$ могут быть непредставимыми в радикалах (корнях различных степеней). Следовательно, общие формулы в радикалах для корней алгебраических уравнений степени $n \geq 5$ не будут открыты никем и никогда. Такие методы и теоремы из-за их сложности не могут быть представлены с полными доказательствами в стандартных математических курсах вузов. Но рассказывать студентам о них следует для повышения их уровня математической культуры, а также для формирования у них нетривиального мышления, повышения их уровня мотивации к изучению математики.

Подобная же информация заключается в том, что КЧ – это самые совершенные из чисел, более совершенных чисел не будет открыто никогда. Это математически доказал У.Р. Гамильтон. Он изучал [13, 14] тринионы (3-составные «числа» $a + bi + cj$) и особенно - кватернионы (4-составные «числа» $a + bi + cj + dk$), где $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, i, j, k – особые «числа». Для тринионов и кватернионов не существует коммутативной операции умножения, а со сложением – все нормально. Если x, y – тринионы или кватернионы, то не всегда $xu = ux$. Тринионы и кватернионы мы не имеем права считать числами, для них нет «хорошего» умножения. Числа – это такие сущности, кото-

рые можно «хорошо» складывать и «хорошо» умножать.

Книга [15] содержит 4 группы аксиом вещественных (действительных) чисел: 1) сложения, 2) умножения, 3) порядка, 4) аксиома о точной верхней грани. Для КЧ выполняются только:

1) аксиомы сложения:

$\forall$ (для любых) a, b $a+b = b+a$ - коммутативность;

$\forall a, b, c$ $(a+b) + c = a + (b+c)$ - ассоциативность;

$\exists 0: \forall a$ (существует 0, такой что для любого a) $a+0 = a$ – существование 0;

$\forall a \cdot \exists (-a)$: (для любого a существует $(-a)$, такое что) $a+(-a) = 0$ – существование противоположного числа;

2) аксиомы умножения:

$\forall a, b$ $ab = ba$ - коммутативность;

$\forall a, b, c$ $(ab)c = a(bc)$ - ассоциативность;

$\exists 1 \neq 0: \forall a$ $a \cdot 1 = a$ – существование 1;

$\forall a \neq 0 \exists (1/a): a(1/a) = 1$ – существование обратного числа;

$\forall a, b, c$ $a(b+c) = ab+ac$ – дистрибутивность.

Эти аксиомы сложения и умножения дают минимальные требования того, чтобы некоторые сущности имели право считаться числами.

Заключение

Разделы 1–3 статьи решают соответственно поставленные задачи 1–3, следовательно, цели 1 и 2 исследования достигнуты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Таратухина, Ю.В., Авдеева З.К. Педагогика высшей школы в современном мире: учебник и практикум для вузов. — М.: Изд-во Юрайт, 2024. — 217 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов. В 2 т. Т. 1: Учебное пособие. — М.: Наука, 1985. — 432 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 1: — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 680 с.
4. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия: Учебник для вузов. — М.: изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. — 388 с.
5. Фокин Р.Р. Некоторые психологические и статистические аспекты преподавания дисциплин из областей математики и информатики в современной высшей школе. // Современные наукоемкие технологии — 2019—№9 - С.175-179.
6. Москвина Н.В., Москвин В.А. Межполушарные асимметрии и индивидуальные различия человека. - М: Смысл, 2011. - 368 с.
7. Новые образовательные технологии и оценка статистической надежности обучения студентов / Ю.А. Пичугин, М.Л. Никонорова, Н.Р. Карелина // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. — 2013. — № 154. — С. 138–145.
8. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник. — 19-е изд. — СПб.: Изд-во «Лань», 2022. — 448 с.
9. Декарт Р. Избранные произведения. — М.: Гос. изд-во полит. лит., 1950. — 712 с.
10. Евклид. Начала. Книги I–XV. Перевод с греческого Д.Д. Мордухай-Болтовского. — М.: Ленанд, 2021 — 616с.
11. Комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского к книге Евклид. Начала. Книги I–XV. — М.: Ленанд, 2021 — 656с.
12. Фокин Р.Р. О содержательном аспекте обучения математике и информатике в современной высшей школе. // Современные наукоемкие технологии — 2021—№6 ч. 2 - С.340-344.
13. Hamilton W.R. Lectures on quaternions: containing a systematic statement of a new mathematical method. - Dublin: Hodges and Smith, 1853. — 868 p.
14. Гамильтон У.Р. Избранные труды: Оптика. Динамика. Кватернионы. - М.: Наука, 1994. - 560 с.
15. Шилов Г.Е. Математический анализ (функции одного переменного). Части 1–2. — М.: изд-во «Наука», 1969. — 528 с.

© Фокин Роман Романович (vka@mail.ru).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»