ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА С ГАРМОНИКАМИ ЗА ВРЕМЯ МЕНЕЕ ПЕРИОДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

ESTIMATION OF THE ERRORS OF THE ALGORITHM OF DETERMINING THE FREQUENCY OF HARMONIC SIGNAL WITH HARMONICS IN A TIME LESS THAN THE PERIOD, USING STOCHASTIC SAMPLING

I. Zaitseva

Summary. The article is dedicated to the study of errors of an algorithm for determining the frequency of the harmonic signals using a probabilistic-statistical method. The main feature of this algorithm is the short time of access to the signal under study and high accuracy of frequency measurement, which is essential for the infralow-frequency signals with a period of duration in minutes, hours, twenty-four hours and more. The information on the theory and computer modeling of the errors in the algorithm for determining the frequency of signals with harmonics is presented, as well as in relation to the harmonics with respect to the first fundamental harmonic of the signal under investigation when sampled by real analog-to-digital converters.

Keywords: signals, harmonics, digital processing, frequency, less than the period access time, stochastic sampling, error.

Зайцева Ирина Николаевна
К.п.н., доцент, ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина», Липецкая область
irina-zai@yandex.ru

Аннотация. Статья посвящена исследованию погрешностей алгоритма определения частоты гармонических сигналов вероятностно-статистическим методом. Особенностью данного алгоритма является кратковременное обращение к исследуемому сигналу, что принципиально важно для инфранизкочастотных сигналов с периодом, измеряемым минутами, часами, сутками и более. Представлены сведения по теории и компьютерному моделированию погрешностей алгоритма определения частоты сигналов с гармониками, а также в зависимости от гармоник относительно первой основной гармоники исследуемого сигнала при дискретизации реальными аналого-цифровыми преобразователями.

Ключевые слова: сигналы, гармоники, цифровая обработка, частота, меньшее периода время обращения, стохастическая дискретизация, погрешность.

Введение

Для идентификации инфранизкочастотных сигналов в акустике, гидроакустике, сейсмоакустике и т.п. необходимым условием является уменьшение времени обращения к анализируемым сигналам [1—6,9,10]. При этом время обращения к исследуемому сигналу, очевидно, должно быть меньше периода самого высокочастотного гармонического сигнала, входящего в состав спектра исследуемого сигнала, или менее периода одночастотного сигнала [1,2,5].

В ряде работ рассмотрены цифровые алгоритмы определения параметров гармонических сигналов за время**,** меньшее их периода с использованием «классических» методов равномерной дискретизации сигналов по времени [1,2,5]. Однако, с точки зрения помехоустойчивости каналов передачи информации, представляется интересным анализ цифровых алгоритмов определения параметров гармонических сигналов при их рассмотрении в течение времени, значительно меньшего их периода, с использованием стохастической дискретизации этих сигналов по времени.

Постановка задачи и вывод основных соотношений

Представим алгоритм определения частоты гармонических сигналов при времени обращения к анализируемому сигналу менее их периода вероятностно-статистическим методом с использованием стохастической дискретизации.

Имеем входной гармонический сигнал:

$$x(t_i) = A \cdot \sin(\omega \cdot t_i) = A \cdot \sin(\alpha_0 + \omega \cdot t_i) \quad (1)$$

где α_0 — начальный угол; ω — круговая частота сигнала;

A — амплитуда сигнала.

Суть рассматриваемой стохастической обработки сигнала выражения (1) для определения частоты заключается в том, что выборки мгновенных значений из сигнала осуществляются по случайному закону.

Рассмотрим случай, когда время выборки из сигнала (1) распределено по равномерному закону.

Имеем плотность распределения интервалов времени для дискретных отсчётов:

$p(t_i) = 1/T_m$ при $t_1 \le t_i \le t_n$

и $p(t_i) = 0$ при других t_i (2)

где $T_m = t_n - t_1$ — время измерения (время обращения к сигналу).

Плотность распределения для $x(t_i)$ при t_i, распределенном равномерно в интервале от t_1 до t_n, как функции от x [7,8] равна:

$$p(x,t_i) = \frac{1}{\omega \cdot T_m} \tag{3}$$

Для определения частоты сигнала (1) по алгоритму, предложенному в работе [5] воспользуемся выражением для математического ожидания значений рассматриваемого сигнала со стохастической дискретизацией во времени как случайного процесса.

Используя выражения (1) и (3), имеем:

$$m_1(x,t_i) = \int_{x_1}^{x_n} x \cdot p(x,t_i) \cdot dx =$$

$$= \frac{2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot T_m/2)}{\omega^2 \cdot T_m} \cdot \sin(2 \cdot \alpha_0 + \omega \cdot T_m/2), \tag{4}$$

где $x_1 = A \cdot \sin(\alpha_0)$, (5)

$$x_n = A \cdot \sin(\alpha_0 + \omega \cdot T_m). \tag{6}$$

Так как из выражения (4) найти частоту сигнала не удается [5], поэтому определим математическое ожидание для второй выборки из сигнала (1) [7]:

$$m_2(x,t_i) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} x \cdot p(x,t_i) \cdot dx = \frac{2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot T_m/2)}{\omega^2 \cdot T_m} \cdot \sin(2 \cdot \alpha_0 + 3 \cdot \omega \cdot T_m/2) \tag{7}$$

где $x_{n+1} = A \cdot \sin(\alpha_0 + 2 \cdot \omega \cdot T_m)$ (8)

Математическое ожидание для третьей выборки из сигнала (1):

$$m_3(x,t_i) = \int_{x_{n+1}}^{x_{n+21}} x \cdot p(x,t_i) \cdot dx =$$

$$= \frac{2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot T_m/2)}{\omega^2 \cdot T_m} \cdot \sin(2 \cdot \alpha_0 + 5 \cdot \omega \cdot T_m/2) \tag{9}$$

где $x_{n+1} = A \cdot \sin(\alpha_0 + 3 \cdot \omega \cdot T_m)$ (10)

Далее, используя соотношения (4), (7), (9) и с учетом работы [5], получим алгоритм для определения частоты ω, независимо от амплитуды сигнала А и начального угла α_0:

$$\omega = \frac{1}{T_m} arccos\left(\frac{m_1(x,t_i) + m_3(x,t_i)}{2m_2(x,t_i)}\right) \tag{11}$$

Оценим погрешности алгоритма (11) при обработке сигнала (1), в котором содержатся гармоники кратных частот, то есть можно записать:

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t_i + \varphi_k) \tag{12}$$

Ограничим сигнал (12) первой и второй гармоникой. Для остальных гармоник расчеты аналогичны. С учетом того, что они независимы, найдём плотность распределения мгновенных значений составляющих такого сигнала, аналогично первой гармоники при равномерном законе распределения времени дискретизации t_i.

Для второй гармоники:

$$x_2(t) = U_{m2} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t_i + \varphi_2) \tag{13}$$

Имеем плотность распределения:

$$p(x_2,t_i) = \frac{1}{2 \cdot \omega \cdot T_m}. \tag{14}$$

С учётом выражений (13), (14), получим выражение математического ожидания $m_{1\Sigma}$ первой, второй $m_{2\Sigma}$ и третьей $m_{3\Sigma}$ выборки из сигнала (12), состоящего из первых двух (и более) гармоник:

$$m_{1\Sigma} = A_1 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot T_m/2)}{\omega \cdot T_m/2} \cdot \sin\left(\alpha_{0x_i} + \omega \cdot T_m/2\right) + \sum_{k=2}^{\infty} U_{mk} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{\sin(k \cdot \omega \cdot T_m/2)}{k \cdot \omega \cdot T_m/2} \cdot \sin(\varphi_k + k \cdot \omega \cdot T_m/2) \quad (15)$$

$$m_{2\Sigma} = A_1 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot T_m/2)}{\omega \cdot T_m/2} \cdot \sin\left(\alpha_{0x_i} + 3 \cdot \omega \cdot T_m/2\right) + \sum_{k=2}^{\infty} U_{mk} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{\sin(k \cdot \omega \cdot T_m/2)}{k \cdot \omega \cdot T_m/2} \cdot \sin(\varphi_k + 3 \cdot k \cdot \omega \cdot T_m/2) \quad (16)$$

$$m_{3\Sigma} = A_1 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot T_m/2)}{\omega \cdot T_m/2} \cdot \sin\left(\alpha_{0x_i} + 5 \cdot \omega \cdot T_m/2\right) + \sum_{k=2}^{\infty} U_{mk} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{\sin(k \cdot \omega \cdot T_m/2)}{k \cdot \omega \cdot T_m/2} \cdot \sin(\varphi_k + 5 \cdot k \cdot \omega \cdot T_m/2) \quad (17)$$

Используя полученные выражения (15,16,17) для математических ожиданий трех выборок из сигнала (12), получим алгоритм для определения круговой частоты ω с погрешностью из-за наличия в сигнале (12) помех в виде чётных и нечётных гармоник:

$$\omega' = \frac{1}{T_m} \cdot arccos\left(\frac{m_{1\Sigma} \quad + m_{3\Sigma}}{2 \cdot m_{2\Sigma}}\right) \quad (18)$$

Относительная погрешность определения частоты $f\,' = \omega'/(2\pi)$ при этом равна:

$$\gamma_{f'} = \frac{f'-f}{f} \cdot 100\% \quad (19)$$

Отметим, что выражения (15,16,17) можно использовать и для анализа влияния помех и не кратных частоте ω, на погрешность определения частоты ω. Для этого необходимо выбирать соответствующее k, ограничив, например, сигнал (12) суммой любого количества гармонических некратных и кратных частот.

Численные результаты

Для вычислений используем гармонический сигнал в виде ифранизкочастотной синусоиды с частотой f=0,00013 Гц и амплитудой A=10 В, который можно представить функцией:

$$x(t_i) = 10 \cdot \sin(\omega \cdot t_i) \quad (20)$$

где t_i — интервалы времени дискретной выборки и сигнала, распределённые по равномерному закону; ω — круговая частота сигнала;

Общее количество дискретных выборок с равномерных выборок примем равным 30000 и за период соответственно получается 7692 выборки. Количество же трех дискретных выборок за время обращения к сигналу менее периода выберем условно равным 1200. Тогда время обращения к периоду исследуемого сигнала около измерения будет в 6,41раза меньше периода первой гармоники.

Для численного моделирования применим программный пакет MathCAD. Используя встроенную статистическую функцию rnd сгенерируем 30000 чисел с равномерным законом распределения.

Далее, расположив полученные значения в виде вариационного ряда по возрастанию, вычислим значения дискретных выборок из синусоидального сигнала без гармоник и с пятью гармониками.

Результаты вычислений проиллюстрированы на рисунках 1 и 2.

На рис. 1 представлен период полного восстановленного (оцифрованного) исследуемого сигнала в виде синусоиды с пятью гармониками со стохастической дискретизацией во времени с равномерным законом распределения, распределёнными с равномерной амплитудой 10% от амплитуды основной первой гармоники. Мы видим, что сигнал значительно искажён.

На рис. 2 представлены графики рассчитанной относительной погрешности определения частоты гармонического сигнала с пятью гармониками от 0,1% до 100% от амплитуды основной первой гармоники. Погрешности рассчитаны по предложенному алгоритму за время обращения к периоду первой гармоники T/6,41. Погрешности рассчитаны для двух случаев, при выборке трех мгновенных отсчетов и трех отсчетов в виде математического ожидания трех выборок по 400 отсчетов в каждой с дискретизацией во времени в виде отсчетов с равномерным законом распределения.

Результаты погрешностей определения частоты исследуемого сигнала с гармониками за время меньшее одного периода со стохастической дискретизацией по времени, представлены в таблице 1.

Заключение

По результатам вычислений была получена оценка погрешностей алгоритма определения частоты гармонического сигнала с гармониками за время менее пери-

Таблица 1

Процент гармоник (5 гармоник)%	Относительная погрешность определения частоты по мгновенным отсчетам,%	Относительная погрешность определения частоты со стохастической дискретизацией,%	Выигрыш в погрешности определения частоты за время менее периода,%
0,1	≤5	≤5	0
3	15	10	+5
10	30	20	+10
20	42	29	+13
30	48	36	+8
50	55	44	+11
100	63	53	+10

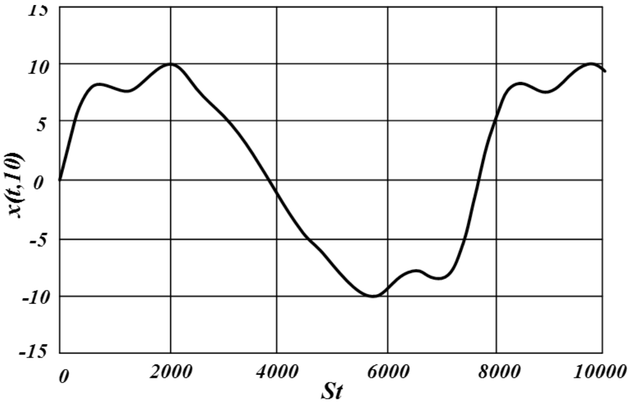

Рис. 1. Восстановленный период исследуемого сигнала

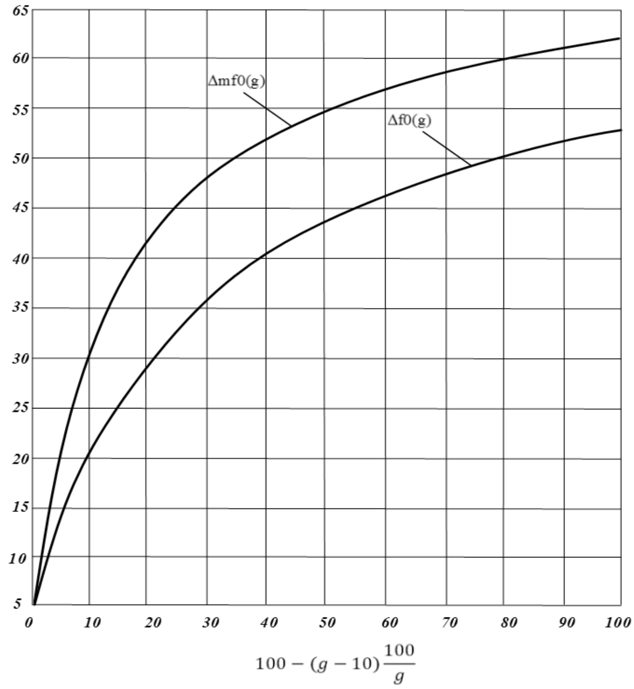

Рис. 2. Погрешности определения частоты исследуемого сигнала с гармониками от 0,1% до 100% относительно амплитуды первой гармоники

ода с использованием стохастической дискретизации и сделаны следующие выводы:

1. Погрешность определения частоты предложенным алгоритмом составляет доли процента и мало зависит от вида дискретизации сигнала по определённому вероятностному закону или по мгновенным значениям при малом проценте <5% амплитуды гармоник в исследуемом сигнале.

2. Значительный выигрыш в погрешности (точности) определения частоты от +5% до +13% получается при применении для исследуемого алгоритма стохастической дискретизации по сравнению с мгновенными отсчетами выборок из сигнала за время значительно меньше периода основной частоты первой гармоники. При этом и сама погрешность определения частоты исследуемым алгоритмом со стохастической дискретизацией находится в приемлемом диапазоне <30% при амплитуде гармоник (до 5-й) до 20%.

Таким образом, анализ полученных данных по погрешностям рассматриваемого алгоритма показывает, что настоящий алгоритм может найти применение при обработке радиосигналов с целью определения частоты основной гармоники с достаточной точностью <20% в акустике, гидроакустике, сейсмоакустике, подводной и подземной связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Угольков В. Н., Беспалов В. М., Цициашвили Г. Ш. Оценка параметров сигнала на фоне случайного шума по наблюдениям в дискретные моменты времени. Прикладной численный анализ и математическое моделирование.— Владивосток: ДВО АН СССР, 1989.— 181 с.
2. Ugol'kov V. N. Methods of Measuring the Phase Shift and Amplitude of Harmonic Signals Using Integral Samples // Measurement Techniques, USA, May 2003.— Volume 46, Issue 5,— P. 495–501.
3. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных.— М.: Мир, 1989.— 540 с.
4. Угольков В. Н., Кирсанов В. Г., Коршунова Н. Д., Кузнецкий С. С. и др. Микропроцессорная система измерения параметров гармонических сигналов в реальном времени // Приборы и техника эксперимента.— 1985.— № 3.— С. 213—221.
5. Мешков В.П., Угольков В. Н. Определение параметров гармонических сигналов по минимуму мгновенных отсчетов.— Красноярск, 1984.— 7с. (Препринт/ Институт физики им. Л. В. Киренского СО АН СССР: ИФСО-262Ф).
6. Мармарелис П., Мармарелис В. Анализ физиологических систем. Метод белого шума: пер. с англ. Е. А. Умрюхина.— М.: Мир, 1981.— 480 с.
7. Вентцель Е. С. Теория вероятностей.— М.: Наука, 1969.— 576 с.
8. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники.— 3-е изд., перераб. и доп.— М.: Радио и связь, 1989.— 656 с.
9. Билинский И. Я., Микельсон А. К. Стохастическая цифровая обработка непрерывных сигналов.— Рига: Зинатне, 1983.— 292 с.
10. Горбунов Ю. Н., Куликов Г. В., Шпак А. В. Радиолокация: стохастический подход / Под ред. профессора Ю. Н. Горбунова.— М.: Горячая линия — Телеком, 2016.— 520 с.

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина