

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ РЕЖИМОВ ГАЗА И БАЛЛОНА ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ИСТЕЧЕНИЯ ГАЗА ИЗ БАЛЛОНА

MATHEMATICAL MODELING OF GAS AND HIGH-PRESSURE CYLINDER TEMPERATURE CONDITIONS DURING GAS DISCHARGE FROM THE CYLINDER

V. Uchvatova
V. Inozemtseva
A. Romanenkov

Summary. The paper considers the temperature conditions of a gas and a high-pressure cylinder during the gas outflow from the cylinder. A method of mathematical modeling of heat transfer through the wall of a high-pressure balloon under non-stationary boundary conditions is presented. The algorithm allows you to set the temperature conditions of the gas and the cylinder during the flow of gas from the cylinder. The influence of the convective heat exchange coefficients of the balloon with the internal and external environment on the temperature regime of the balloon under various boundary conditions is studied. The value of the heat transfer coefficient is determined by comparing the results of mathematical modeling with the results of experiments on filling and exposure of a high-pressure cylinder. It is shown that in the range of possible values of coefficients and possible temperature differences between the internal and external environments, the temperature gradient along the wall thickness of the balloon is negligible.

Keywords: mathematical modeling, temperature regimes, heat transfer process, quasi-stationary boundary conditions, convective heat transfer coefficients, free balloons.

Учватова Валентина Пантелеевна

Доцент, Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет),
Москва

valentina.uchvatova@yandex.ru

Иноземцева Валентина Сергеевна

Старший преподаватель, Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет), Москва
v.s.inozemtseva@mail.ru

Романенков Александр Михайлович

Доцент, Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет),
Москва

romanaleks@gmail.com

Аннотация. В работе рассматриваются температурные режимы газа и баллона высокого давления, в процессе истечения газа из баллона. Представлена методика математического моделирования теплопередачи через стенку баллона высокого давления при нестационарных граничных условиях. Алгоритм позволяет установить температурные режимы газа и баллона в процессе истечения газа из баллона. Исследовано влияние коэффициентов конвективного теплообмена баллона с внутренней и наружной средой на температурный режим баллона при различных граничных условиях. Из сравнения результатов математического моделирования с результатами экспериментов по наполнению и экспозиции баллона высокого давления определена величина коэффициента теплоотдачи. Показано, что в диапазоне возможных значений коэффициентов и возможных перепадов температур между внутренней и наружной средами, градиент температуры по толщине стенки баллона пренебрежимо мал.

Ключевые слова: математическое моделирование, температурные режимы, процесс теплообмена, квазистационарные граничные условия, коэффициенты конвективного теплообмена, свободные аэростаты.

Введение

В настоящее время широкое применение приобретают современные воздухоплавательные аппараты для решения различных научно-исследовательских и прикладных задач [2, 13, 15].

Успехи в области материаловедения, разработка новой технологии получения полимерных пленок, обладающих высокими удельными прочностными характеристиками, способствуют развитию воздухоплавания

и позволяют создавать свободные аэростаты с качественно новыми летно-техническими характеристиками по высотности, грузоподъемности и продолжительности полета [2, 13, 15]. Свободные аэростаты снабжены специальной системой управления, автоматически стабилизирующей высоту полета или ее изменение по заданной программе. Усилия конструкторов при создании комплексов свободных аэростатов направлены на разработку схем старта, увеличивающих надежность оболочки, на повышение эксплуатационных характеристик системы газообеспечения, на методы и способы, позво-

ляющие существенно сократить время газонаполнения оболочки аэростата, уменьшая тем самым вероятность воздействия на нее ветровых режимов, превышающих допускаемые [4, 10].

В состав системы газообеспечения современных аэростатных комплексов [4] входят газозаправщики, включающие в себя баллоны высокого давления, закомпримированные подъемным газом до избыточного давления 20–40 МПа, что позволяет значительно уменьшить время газонаполнения оболочки аэростата за счет большого расхода газа из баллонов. Это особенно важно при скоростях ветра, превышающих 5 м/с, и массовых стартах аэростатов. Сокращение времени воздействия ветровых нагрузок на оболочку повышает надежность эксплуатации аэростата на этапе старта.

Для обеспечения задаваемых параметров надежности аэростата процессы ускоренного газонаполнения оболочки из баллонов высокого давления, запуска и взлета аэростата должны строго регламентироваться, а кинематические параметры при этом могут изменяться в допускаемых пределах, поэтому очевидна актуальность теоретического и экспериментального исследования термодинамических процессов, происходящих во всех элементах аэростатного комплекса т.е. в оболочке аэростата, газовых магистралях и баллонах газозаправщика [1, 5].

В настоящей работе рассматриваются температурные режимы газа и баллона высокого давления в процессе истечения газа из баллона. Эти режимы зависят от теплообмена баллонов с окружающей средой (задача теплообмена). Одной из целей работы является определение величин коэффициентов теплоотдачи $\alpha_{\text{в}}$ и $\alpha_{\text{г}}$, от которых зависят температурные режимы газа и баллона высокого давления. В работе представлены результаты теоретических исследований влияния теплопроводности стенок баллона высокого давления на температурные режимы баллона и газа, выдаваемого из баллонов высокого давления, в процессе газонаполнения оболочки [5].

Результаты теоретических и экспериментальных исследований [9, 14] показывают, что параметры состояния газа, выдаваемого из баллона высокого давления, существенно зависят от продолжительности времени выдачи и значения начальных параметров газа в баллонах. Газ, находящийся в баллоне, может по мере истечения весьма сильно переохладиться за счет расширения [11]. Степень этого переохлаждения зависит от массы газа и баллона, а также от параметров, характеризующих процесс теплопередачи от окружающей среды через стенку баллона к газу. Поскольку масса баллона и толщина его стенки довольно значительны, целесообразно

оценить влияние теплопроводности стенки баллона на температурный режим баллона высокого давления в процессе выдачи газа.

В данной работе разработана и приведена методика математического моделирования температурного режима баллона высокого давления с учетом теплопередачи через стенку баллона, описан алгоритм моделирования, приведены результаты моделирования. На основании сравнения полученных результатов с результатами экспериментов [9] определены величины коэффициентов теплоотдачи, которые должны закладываться в расчеты температурных режимов газа и баллона высокого давления.

Постановка задачи и выбор метода решения

Температурные режимы баллона и газа, выдаваемого из баллона высокого давления, существенно зависят от теплообмена баллонов с окружающей средой [5, 6]. Учитывая, что процесс газонаполнения оболочки может идти довольно быстро, а разность температур окружающей среды и газа в баллоне может достигать значительной величины, представляется целесообразным при решении задачи об истечении газа из баллонов учесть нестационарный характер теплопередачи через стенки баллона. При этом для простоты рассматривается сферический баллон, считая, что его масса и объем равны соответствующим величинам для баллона высокого давления.

Таким образом, в работе рассматривается одномерная задача нестационарной теплопроводности для полого шара при нестационарных граничных условиях.

Математическая модель теплообмена имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (1)$$

где r — координата вдоль радиуса; $R_{\text{в}} \leq r \leq R_{\text{г}}$ — сферический слой; t — время;

$$a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} —$$

коэффициент температуропроводности материала баллона; ρ — плотность материала баллона; c — теплоемкость материала баллона; T — температура стенки баллона.

Начальное условие:

$$t = 0 : T = B(r), \quad (2)$$

где $B(r)$ — распределение температуры вдоль радиуса.

Граничные условия, описывающие конвективный теплообмен между стенками баллона и внешней или внутренней средой, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 t > 0, \quad r = R_n : \quad \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{\alpha_n}{\lambda} \cdot (T_n - T) \\
 r = R_e : \quad \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{\alpha_e}{\lambda} \cdot (T - T_e)
 \end{aligned} \tag{3}$$

где T_e и T_n — температуры среды внутри и снаружи баллона; α_e и α_n — коэффициенты конвективной теплоотдачи соответственно от внутренней и наружной среды к стенке баллона.

Приводя выражения (1) — (3) к безразмерному виду, с помощью соотношений:

$$\begin{aligned}
 T &= T_p \cdot \bar{T}; \quad r = R_n \bar{r}; \quad t = \frac{R_n^2}{\alpha} \bar{t}; \quad \alpha_n = \frac{\lambda}{R_n} \bar{\alpha}_n; \\
 \alpha_e &= \frac{\lambda}{R_n} \bar{\alpha}_e; \\
 R_e &= R_n \cdot \bar{R}; \quad T_n = T_p \cdot \bar{T}_n; \quad T_e = T_p \cdot \bar{T}_e; \quad B = T_p \cdot \bar{B}; \tag{4}
 \end{aligned}$$

где T_p — некоторое значение температуры, связывающее размерные и безразмерные величины, и подставляя (4) в (1) — (3), получим:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \alpha \cdot \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{2}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right), \tag{1'}$$

$$t = 0 : \quad \bar{T} = \bar{B}(\bar{r}), \tag{2'}$$

$$\begin{aligned}
 t > 0, \quad \bar{r} = 1 : \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} &= \bar{\alpha}_n \cdot (\bar{T}_n - \bar{T}), \\
 \bar{r} = \bar{R} : \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} &= \bar{\alpha}_e \cdot (\bar{T} - \bar{T}_e).
 \end{aligned} \tag{3'}$$

В дальнейшем знак черты над безразмерными величинами опускается.

Рассматриваемое уравнение теплопроводности является дифференциальным уравнением в частных производных параболического типа с начальными и краевыми условиями. Методы нахождения аналитических решений начально-краевых задач рассмотрены в [3, 7, 8, 12]. В указанных работах рассматривались:

- ◆ Представление решения через функцию Грина [3, 8].
- ◆ Метод разделения переменных:

(а) решение представлено в виде ряда от произведения решений двух задач [3, 7, 8, 12];

(б) решение представлено через функции Бесселя [3, 7, 12].

- ◆ Нахождение решения с помощью преобразования Лапласа [7].
- ◆ Нахождение решения с помощью преобразования Фурье [7].

Анализируя, перечисленные выше, методы решения начально-краевых задач с нестационарными граничными условиями применительно к уравнению теплопроводности (1') — (3') можно сделать следующий вывод: решение поставленной задачи можно находить одним из следующих методов:

- ◆ с помощью функции Грина (в граничных условиях (3') коэффициенты α_n и α_e должны быть константами).
- ◆ методом разделения переменных.
- ◆ с помощью преобразования Лапласа.

Метод нахождения решения с помощью преобразования Фурье использовать нельзя, так как уравнение теплопроводности (1') содержит коэффициент зависящий от пространственной переменной r .

Особенностью задачи (1') — (3') является то, что в граничных условиях (3') нестационарными являются как функции температур $T_n(t)$, $T_e(t)$, так и функции $\alpha_n(t)$, $\alpha_e(t)$, что существенно ограничивает непосредственно применение этих методов.

Если использовать квазистационарность граничных условий на достаточно малом интервале времени, а весь рассматриваемый интервал — сумма конечного числа достаточно малых интервалов, то для каждого достаточно малого интервала можно найти аналитическое решение задачи (1') — (3'). Начальным условием для каждого интервала времени будет являться распределение температуры по толщине стенки, которое получилось в результате решения задачи для предыдущего интервала. Таким образом, при исследовании процесса теплообмена с квазистационарными граничными условиями метод разделения переменных является наиболее удобным в реализации.

Математическая модель

Общее решение (1') ищется, в виде:

$$T(r, t) = T_0(r) + T_1(r, t), \tag{5}$$

где $T_0(r)$ — решение краевой задачи:

$$\frac{d^2 T_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{dT_0}{dr} = 0 \tag{6}$$

с неоднородными граничными условиями:

$$r = 1: \frac{dT_0}{dr} = \alpha_n \cdot (T_n - T_0), \quad (7)$$

$$r = R: \frac{dT_0}{dr} = \alpha_e \cdot (T_0 - T_e).$$

$T_1(r, t)$ — решение уравнения:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial r}, \quad (8)$$

с однородными граничными условиями:

$$r = 1: \frac{\partial T_1}{\partial r} = -\alpha_n \cdot T_1, \quad (9)$$

$$r = R: \frac{\partial T_1}{\partial r} = \alpha_e \cdot T_1,$$

Согласно теории, решение задачи (6) — (7) имеет вид:

$$T_0 = A_1 + \frac{A_2}{r}, \text{ где} \quad (10)$$

$$\begin{cases} A_2 = (T_n - T_e) \left/ \left(\frac{\alpha_n - 1}{\alpha_n} - \frac{\alpha_e \cdot R + 1}{\alpha_e \cdot R^2} \right) \right., \\ A_1 = T_n - \frac{\alpha_n - 1}{\alpha_n} \cdot A_2, \end{cases} \quad (11)$$

а решение задачи (8) — (9) (методом разделения переменных) запишется в виде:

$$T_1(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{r} \cdot [\sin(\mu_n \cdot r) + b_n \cdot \cos(\mu_n \cdot r)] \cdot e^{-\mu_n^2 t}, \quad (12)$$

где μ_n — собственные значения, находятся из характеристического уравнения:

$$a_1 \cdot \cos(1 - R)\mu_n - a_2 \cdot \sin(1 - R)\mu_n = 0, \quad (13)$$

где

$$a_1 = \mu_n \left(1 - \frac{1}{R} - \alpha_e - \alpha_n \right), \quad a_2 = \mu_n^2 + (1 - \alpha_n) \cdot \left(\frac{1}{R} + \alpha_e \right);$$

b_n — коэффициенты:

$$b_n = \frac{[\mu_n \cdot \cos \mu_n - (1 - \alpha_n) \cdot \sin \mu_n]}{[\mu_n \cdot \sin \mu_n + (1 - \alpha_n) \cdot \cos \mu_n]}. \quad (14)$$

Общее решение исходного уравнения (1') запишется в виде суммы (8) и (11):

$$T(r, t) = A_1 + \frac{A_2}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{r} \cdot [\sin(\mu_n \cdot r) + b_n \cdot \cos(\mu_n \cdot r)] \cdot e^{-\mu_n^2 t}. \quad (15)$$

Коэффициенты c_n определяются из начального условия:

$$t = 0 : T(r, t) = B(r), \quad B = B_0 = const, \quad (16)$$

в котором учтена ортогональность собственных функций:

$$\int_R^1 r^2 \cdot F_n \cdot F_m dr = 0. \quad (17)$$

$$c_n = X_{1n} / X_{2n}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} X_{1n} = & (A_1 - B_0) \cdot \left[\left(\frac{b_n}{\mu_n} - 1 \right) \cdot \cos(\mu_n) - \right. \\ & - \left(\frac{b_n}{\mu_n} - R \right) \cdot \cos(\mu_n R) + \left(b_n + \frac{1}{\mu_n} \right) \cdot \sin(\mu_n) - \\ & - \left(R \cdot b_n + \frac{1}{\mu_n} \right) \cdot \sin(\mu_n R) \left. \right] + A_2 \cdot \left[b_n \cdot \sin(\mu_n) - \right. \\ & - b_n \cdot \sin(\mu_n \cdot R) - \cos(\mu_n) + \cos(\mu_n \cdot R) \left. \right]. \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{2n} = & \left(\frac{b_n^2 + 1}{2} \right) \cdot \mu_n \cdot (R - 1) + \left(\frac{b_n^2 + 1}{4} \right) \cdot (\sin(2\mu_n \cdot R) - \\ & - \sin(2\mu_n)) + b_n \cdot (\sin^2(\mu_n \cdot R) - \sin^2(\mu_n)). \quad (20) \end{aligned}$$

Формулы (18) — (20) получаются в результате следующих действий:

1. Начальное условие (16) подставляется в решение (15).
2. Обе части выражения, полученного в п. 1, умножаются на $r \cdot [\sin(\mu_n \cdot r) + b_n \cdot \cos(\mu_n \cdot r)]$.
3. Осуществляется интегрирование выражения, полученного в п. 2, от R до 1, учитывая условие ортогональности собственных функций.

Таким образом, если температуры наружной T_n и внутренней T_e среды остаются неизменными, то распределение температуры по толщине стенки для момента времени t описывается выражением (15), где коэффициенты разложения c_n определяются по формуле (18), коэффициенты b_n — по формулам (14), константы A_1 и A_2 — по (11), собственные числа μ_n — находятся из уравнения (13).

В рассматриваемой задаче величины T_e и T_n в общем случае не остаются постоянными в течение всего процесса. Изменяются также и коэффициенты конвективной теплоотдачи α_e и α_n , зависящие от температур стенки и среды. В связи с этим граничные условия (3') становятся нестационарными, и решение исходного уравнения (1') не может быть выражено в виде (14) для всего рассматриваемого отрезка времени.

Для нахождения решения в случае нестационарных граничных условий используется следующий подход:

- ♦ весь рассматриваемый отрезок времени разбивается на элементарные интервалы Δt ; считается что в течение каждого интервала граничные условия (3') остаются неизменными и определяются значениями температур в момент времени, соответствующим началу данного интервала;
- ♦ начальное условие для каждого интервала времени — распределение температуры по толщине стенки, получается в результате решения задачи для предыдущего интервала.

Решение уравнений (1') для рассматриваемого интервала времени может быть в таком случае представлено в виде (14).

Начальное для данного интервала времени распределение температуры можно записать следующим образом:

$$t = 0: B(r) = A_0 + \frac{A_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n0}}{r} \cdot [\sin(\mu_{n0} \cdot r) + b_{n0} \cdot \cos(\mu_{n0} \cdot r)] \cdot e^{-\mu_{n0}^2 \cdot \Delta t_0}, \tag{21}$$

где все величины с индексом «0» относятся к предыдущему интервалу времени Δt_0 , и являются известными.

Подчиняя общее решение (15) начальному условию (21), получится следующее уравнение для определения коэффициентов c_n :

$$A_1 + \frac{A_2}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{r} \cdot [\sin(\mu_n \cdot r) + b_n \cdot \cos(\mu_n \cdot r)] = A_{10} + \frac{A_{20}}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n0}}{r} \cdot [\sin(\mu_{n0} \cdot r) + b_{n0} \cdot \cos(\mu_{n0} \cdot r)] \cdot e^{-\mu_{n0}^2 \cdot \Delta t_0}. \tag{22}$$

Вычисление величин A_1, A_2, μ_n, b_n , входящих в (22), выполняется по формулам (10), (13), (14), в которые входят текущие значения температур T_{gr}, T_n и коэффициентов теплоотдачи α_{gr}, α_n .

Умножая обе части выражения (22) на $r \cdot [\sin(\mu_m \cdot r) + b_m \cdot \cos(\mu_m \cdot r)]$ и интегрируя в пределах от R до 1, учитывая условие ортогональности собственных функций, после некоторых преобразований, получается выражение для нахождения коэффициентов c_n :

$$c_n = Y_{1n} / Y_{2n}, \tag{23}$$

где

$$Y_{1n} = (A_1 - A_{10}) \cdot \left[\left(\frac{b_n}{\mu_n} - 1 \right) \cos(\mu_n) - \left(\frac{b_n}{\mu_n} - R \right) \cos(\mu_n R) + \left(b_n + \frac{1}{\mu_n} \right) \cdot \sin(\mu_n) - \left(R \cdot b_n + \frac{1}{\mu_n} \right) \cdot \sin(\mu_n R) \right] + (A_2 - A_{20}) \cdot [b_n \cdot \sin(\mu_n) - b_n \cdot \sin(\mu_n \cdot R) - \cos(\mu_n) + \cos(\mu_n \cdot R)] - J_n \cdot \mu_n. \tag{24}$$

$$Y_{2n} = \left(\frac{b_n^2 + 1}{2} \right) \mu_n (R - 1) + \left(\frac{b_n^2 + 1}{4} \right) \cdot (\sin(2\mu_n \cdot R) - \sin(2\mu_n)) + b_n \cdot (\sin^2(\mu_n \cdot R) - \sin^2(\mu_n)). \tag{25}$$

$$J_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_{n0} \cdot e^{-\mu_{n0}^2 \cdot \Delta t_0} \left\{ \frac{1 + b_n b_{n0}}{\mu_n - \mu_{n0}} \cdot [\sin(\mu_{n0} - \mu_n) - \sin(\mu_{n0} - \mu_n) R] + \frac{b_n b_{n0} - 1}{\mu_n + \mu_{n0}} \cdot [\sin(\mu_n + \mu_{n0}) - \sin(\mu_n + \mu_{n0}) R] + \frac{b_n b_{n0} - 1}{\mu_n + \mu_{n0}} \cdot [\sin(\mu_n + \mu_{n0}) - \sin(\mu_n + \mu_{n0}) R] + \frac{b_n - b_{n0}}{\mu_n - \mu_{n0}} \cdot [\cos(\mu_{n0} - \mu_n) - \cos(\mu_{n0} - \mu_n) R] \right\} + \frac{b_n + b_{n0}}{\mu_n + \mu_{n0}} \cdot [\cos(\mu_{n0} + \mu_n) R - \cos(\mu_{n0} + \mu_n)]. \tag{26}$$

Распределение температуры для рассматриваемого интервала времени Δt можно записать в виде, аналогичном (18):

$$T(r, t) = A_1 + \frac{A_2}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{r} \cdot [\sin(\mu_n \cdot r) + b_n \cdot \cos(\mu_n \cdot r)] \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot t}, \quad \text{где } 0 \leq t \leq \Delta t. \tag{27}$$

Алгоритм построения математической модели

Алгоритм решения задачи (1') — (3') в соответствии с изложенной методикой заключается в следующем:

1. Задается начальное распределение температуры по стенке баллона в общем случае в виде:

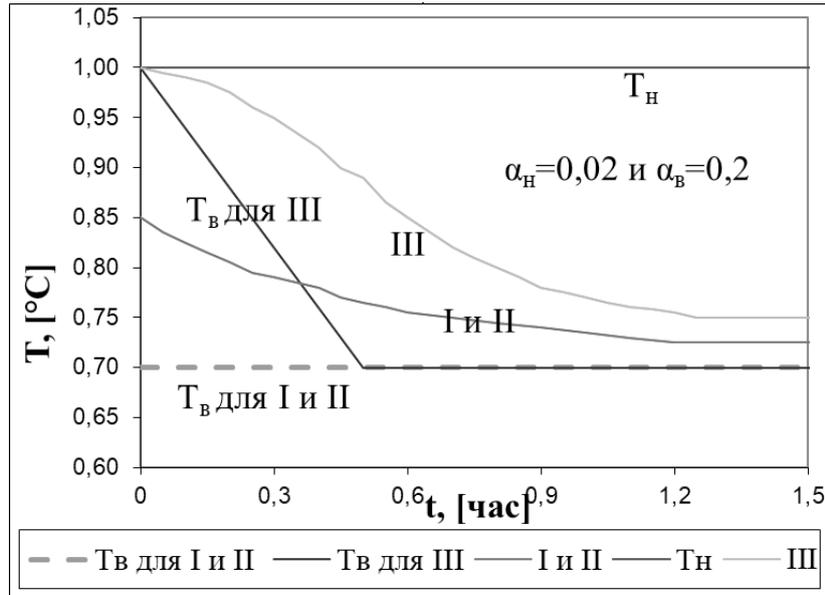


Рис. 1. Результаты контрольных экспериментов

$$T(r,0) = A_{10} + \frac{A_{20}}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n0}}{r} \cdot [\sin(\mu_{n0} \cdot r) + b_{n0} \cdot \cos(\mu_{n0} \cdot r)]. \quad (28)$$

Если $T(r, 0) = const$, то A_{20} и сумма в (28) поучаются равными нулю. В этом случае задается равным нулю и значение интеграла J_n в (26), входящего в формулы для вычисления коэффициентов c_n .

2. Задаются значения наружной T_n и внутренней $T_{в}$ температур или законы, связывающие T_n , $T_{в}$ с температурой стенки T .

3. Задаются значения коэффициентов теплоотдачи $\alpha_n(T_n, T)$ и $\alpha_{в}(T_{в}, T)$.

4. Задается шаг интегрирования $\Delta t(t)$.

5. Задается внутренний радиус баллона $R_{в}$.

По заданным значениям определяются для первого интервала времени:

- ◆ константы A_1 и A_2 — по формулам (11),
- ◆ собственные значения μ_n — из (13),
- ◆ коэффициенты b_n — по (14),
- ◆ коэффициенты c_n — по (23) — (26).

По найденным значениям определяется по формуле (27) распределение температуры для данного интервала времени. Количество слагаемых в сумме (27), определяется заданной точностью решения.

Для продолжения решения на следующем интервале времени задаются новые начальные условия, представляющие собой значения всех величин, в конце предше-

ствующего интервала, после чего повторяется описанная выше процедура вычислений.

В соответствии с изложенным алгоритмом построена математическая модель температурных режимов газа и баллона и проведены исследования. Исследования проводились при различных значениях коэффициентов конвективной теплопроводности от внутренней среды к стенке баллона ($\alpha_{в}$) и от наружной среды к стенке баллона (α_n).

Анализ результатов моделирования

Для проверки разработанного алгоритма и его программной реализации, были проведены эксперименты с математической моделью для некоторых контрольных вариантов. Результаты этих исследований приведены на рис. 1.

В первом варианте считалось, что величины T_n , $T_{в}$, α_n , $\alpha_{в}$ не меняются в течение всего рассматриваемого времени, т.е. граничные условия являются стационарными. Начальная температура стенки принималась постоянной по толщине и равной $T=0,5 \cdot (T_{в} + T_n)$. Решение задачи записывалось в виде (15) для всего рассматриваемого времени (без разбиения на интервалы). На рис. 1 показано изменение температуры стенки по времени при $T_{в} = 0,7$, $T_n = 1$ (кривая I). Видно, что с увеличением времени температура стенки стремится к стационарному значению.

Во втором варианте та же задача решалась по общему алгоритму с разбиением времени на малые интер-

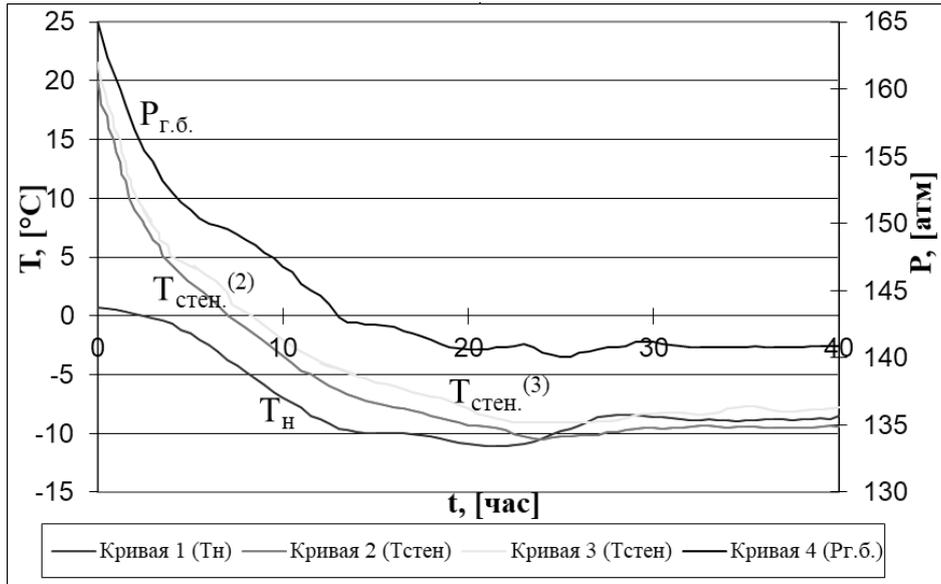


Рис. 2. Температурные режимы баллона

валы ($\Delta t = 0,01$). Результаты экспериментов с математическими моделями для в первого и второго вариантов полностью совпали (кривая II).

В третьем варианте рассматривалась задача с переменными граничными условиями внутри баллона. Температура T_0 за время $t=0,5$ изменялась от $T_0 = 1$ до $T_0 = 0,7$ и далее осталась неизменной. Температура T_H при этом постоянна и равна 1. Зависимость температуры от времени в этом случае имеет вид, показанный на рис. 1 — кривая III. Из рис. 1 видно, что температура стремится с ростом времени к стационарному значению. Кривые I и III, начиная с времени $t \approx 0,58$, являются эквидистантными в направлении t , как и должно быть. Градиент температуры стенки по радиусу во всех случаях получается близким к нулю, что связано с выбором численных значений коэффициентов теплоотдачи α_H и α_0 . Результаты проведенных контрольных исследований показали, что разработанная методика может быть использована для математического моделирования температурного режима баллонов высокого давления в процессе газонаполнения с учетом теплопередачи через стенки баллонов.

Одной из целей данной работы являлось определение величин коэффициентов теплоотдачи α_H и α_0 , от которых зависит температурный режим баллонов высокого давления. Анализ имеющихся экспериментальных данных [5, 9] показал, что величина α_H может быть приблизительно определена из сравнения результатов расчетов с результатами экспериментов, описанных в [9].

В процессе этих экспериментов осуществлялись газонаполнение баллонов высокого давления и последую-

щая их экспозиция в течение продолжительного времени. Результаты одного из экспериментов представлены на рис. 2, где изображены температурные зависимости, получившиеся при эксплуатации баллона, наполненного воздухом до давления ~ 160 атм. Кривой 1 обозначена температура окружающей среды, изменяющаяся в процессе экспозиции баллона; область между кривыми 2 и 3 — область значений температуры стенки баллона, измеренные различными датчиками [9]. Кривой 4 изображено изменение давления в баллоне. Начальная температура баллона, как видно из рис. 2, примерно на 20° превышает температуру окружающей среды. В процессе экспозиции температуры баллона и окружающей среды сближаются. Произведены исследования процесса теплообмена при различных значениях коэффициентов, α_H и α_0 , которые варьировались в достаточно широких пределах.

В пробных экспериментах с математической моделью, значения α_H и α_0 принимались одинаковыми. Исследования показали, что теоретические и экспериментальные результаты получаются наиболее близкими друг к другу при значениях $\alpha_H = \alpha_0 = 0,015$. Затем, на базе математической модели, были проведены исследования, в которых рассматривалось отдельно влияние α_H и α_0 на температурный режим баллона в процессе экспозиции. На рис. 3 приведены результаты математического моделирования, полученные для $\alpha_H = 0,015$, при различных значениях α_0 .

Из рис. 3 видно, что при величинах $\alpha_0 > 0,005$ температурные зависимости, соответствующие различным α_0 , практически сливаются в одну кривую: в рассматриваем-

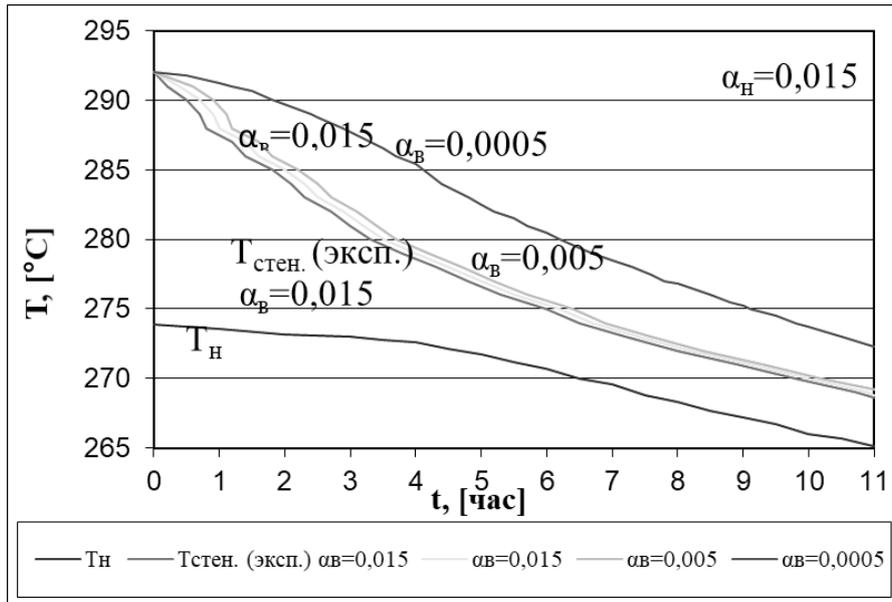


Рис. 3. Влияние α_b на температурные режимы баллона

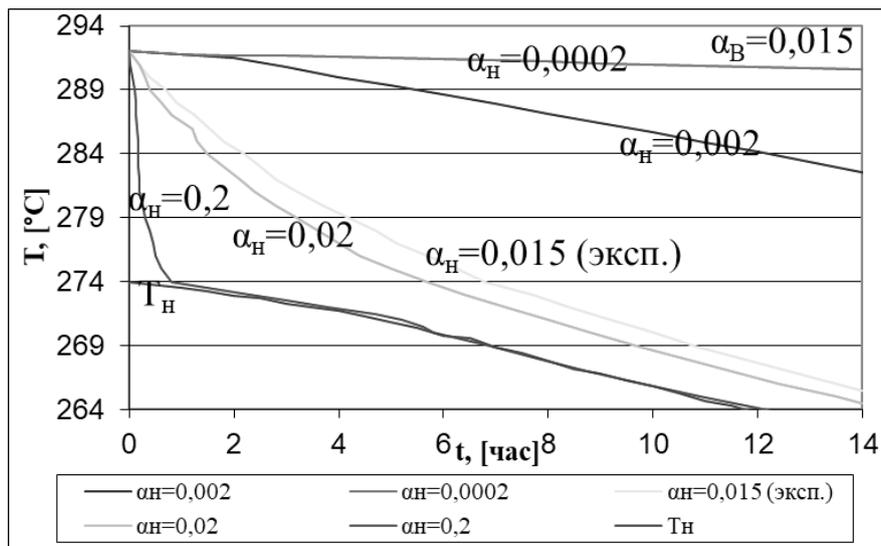


Рис. 4. Влияние α_n на температурные режимы баллона

мом процессе влияние величины коэффициента конвективного теплообмена между внутренней средой и стенкой на температурный режим баллона — незначительно. Таким образом, если допустить, что α_b имеет примерно тот же порядок, что и α_n , то из сравнения с экспериментальными данными [9] можно сделать вывод, что величина коэффициентов конвективной теплоотдачи от стенки баллона к окружающей среде равна $\sim 0,015$.

Для определения величины α_b необходимы экспериментальные данные по существенно более быстрому термодинамическому процессу.

На рис. 4. показано влияние α_n на температурный режим баллона при экспозиции; α_b принималось во всех случаях равным 0,015. Как видно из рис. 4, величина α_n существенно влияет на изменение температуры баллона в процессе эксплуатации. При величинах $\alpha_n < 0,0002$ конвективный теплообмен баллона с окружающей средой практически отсутствует; при $\alpha_n > 0,2$ — баллон принимает температуру окружающей среды достаточно быстро.

Результаты математического моделирования показали, что при всех заданных значениях величин коэф-

коэффициентов теплоотдачи α_n и α_g градиент температуры по толщине стенки баллона получается практически равным нулю. Таким образом, при математическом моделировании температурного режима баллона высокого давления в процессе выдачи газа, температура стенки баллона по толщине может считаться постоянной.

Заключение

1. Проведен сравнительный анализ аналитических методов решения уравнения теплопроводности с нестационарными граничными условиями. При исследовании процесса теплообмена с квазистационарными граничными условиями метод разделения переменных является наиболее удобным в реализации.
2. Разработана методика математического моделирования теплопередачи через стенку баллона

высокого давления при нестационарных граничных условиях. Алгоритм позволяет установить температурные режимы газа и баллона в процессе истечения газа из баллона.

3. Исследовано влияние коэффициентов конвективного теплообмена баллона с внутренней (α_g) и наружной (α_n) средой на температурный режим баллона при различных граничных условиях.
4. Из сравнения результатов математического моделирования с результатами экспериментов по наполнению и экспозиции баллона высокого давления определена величина коэффициента теплоотдачи α_n .
5. Показано, что в диапазоне возможных значений коэффициентов α_n и α_g и возможных перепадов температур между внутренней и наружной средами градиент температуры по толщине стенки баллона пренебрежимо мал.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агамиров В.Л., Глухарев А. Н., Пяташев Р. В. Свободные аэростаты. М.: Академия имени Н. Е. Жуковского, 1997.
2. Альтер-Залик Ю. Ж. Зондирование атмосферы с помощью аэростатов. Л.: Гидрометеиздат, 1981.
3. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974.
4. Баженов В.И., Зайцев В. Г., Зоммерфельд В. Г. и др. Развитие идей К. Э. Циолковского об особенностях газонаполнения оболочки аэростатов из баллонов высокого давления // Труды XX–XXI Чтений К. Э. Циолковского. М., 1987.
5. Баум В.И., Лучев О. Н., Мамедниязов С. О. и др. Влияние условий конвективного теплообмена на тепловое состояние воздухоплавательных летательных аппаратов // Труды XX–XXI Чтений К. Э. Циолковского. М., 1987.
6. Белоногов Е.К., Елисеев В. Н., Саква Н. В., Феонычев А. И., Черников С. П., Щугарев С. Н. Математическое моделирование теплового состояния конструкций воздухоплавательных летательных аппаратов // Труды Чтений XX К. Э. Циолковского. К., 1986.
7. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
8. Зайцев В.Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными. М.: Международная программа образования, 1996.
9. Кочерова В.П., Зоммерфельд В. Г. Экспериментальные исследования параметров течения газа при газонаполнении воздухоплавательных летательных аппаратов из баллонов высокого давления // Тезисы докл. Гагаринских научных чтений по космонавтике и авиации. 1986. М.: Наука, 1987.
10. Литовченко В.П., Щугарев С. Н. Влияние нестационарного теплового состояния оболочки и подъемного газа на аэростатические характеристики дирижаблей // Труды XXII Чтений К. Э. Циолковского. К., 1988.
11. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.
12. Тихонов А.Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004.
13. Шашин В. М. Воздухоплавательная техника: Итоги науки и техники // ВИНТИ. М., 1984.
14. Штыря А. С. Определение температуры оболочки воздухоплавательного аппарата с учетом локальных характеристик теплообмена // Труды XXIII Чтений К. Э. Циолковского. М., 1988.
15. Malaterre P. Long-duration flights using infrared montgolfieres // 7th ESA Symposium on European rocket and Balloon programs and related research, 5–11 May, 1985, Loen, Norway. New York, 1985.

© Учватова Валентина Пантелеевна (valentina.uchvatova@yandex.ru),

Иноземцева Валентина Сергеевна (v.s.inozemtseva@mail.ru), Романенков Александр Михайлович (romanaleks@gmail.com).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»